## 0.5 Δραστηριότητες σελ. 41-42 (Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης)

**Άσκηση 1**

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:
**(α)** Ισχύει $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(β)** Για τη συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(0) = 0$.

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(γ)** Αν η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f(\eta\mu x))' = f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)'.$$

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(δ)** Για τη συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x) = \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = \eta\mu^2(2x)$, για κάθε $z \in \mathbb{R}$.

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(ε)** Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E$ ενός τετραγώνου πλευράς $a$ ως προς την πλευρά του ισούται με $2a$.

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(στ)** Αν η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) > 0.$$

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**(ζ)** Ο τύπος $(f(g(x_0))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ ισχύει όταν οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$.

**ΣΩΣΤΟ** / **ΛΑΘΟΣ**

**Λύση**
**(α) ΛΑΘΟΣ** Π.χ. για $x = \frac{\pi}{2}$.
**(β) ΣΩΣΤΟ** Είναι

$$f(x) = e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \Longrightarrow f'(x) = (x^2)' \cdot e^{x^2} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα $f'(0) = 2 \cdot 0e^{0^2} = 0$.

**(γ) ΣΩΣΤΟ** Αφού η $f$ είναι από υπόθεση παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ όπως επίσης και η $x \mapsto \eta\mu x$, η σύνθεσή τους θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με (από τον κανόνα της Αλυσίδας)

$$(f(\eta\mu x))' = (f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)', \; x \in \mathbb{R}.$$

**(δ) ΣΩΣΤΟ** Έχουμε

$$f(x)=\eta\mu^2 x,\ x\in\mathbb{R}\Longrightarrow f'(x)=2(\eta\mu x)'\cdot\eta\mu x=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu(2x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

**(ε) ΣΩΣΤΟ** Αν $E:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $a\mapsto E(a)=a^2$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά $a$, τότε $E'(a)=2a,\forall x\in(0,+\infty)$.

**(στ) ΣΩΣΤΟ** Είναι Θεωρία

**(ζ) ΛΑΘΟΣ** Πάρτε για παράδειγμα $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=|x-1|$, $x\in\mathbb{R}$ και $x_0=0$. Τότε, η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)=g(0)=|-1|=1$ αλλά, η αλλά η $g'(1)$ δεν ορίζεται. Είναι δε $f'(g(x_0))=f'(1)=1$.

## Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

**(α)** $y=\eta\mu(3x)$ **(β)** $y=\sigma\upsilon\nu^2(4x)$ **(γ)** $y=(x^3-2x+6)^5$

**(δ)** $y=\sqrt{x^2+1}$ **(ε)** $y=\eta\mu(e^x+\sigma\upsilon\nu x)$ **(στ)** $y=e^{\sqrt{x^2+3}}$

**(ζ)** $y=\sigma\varphi^5(x^2+1)$ **(η)** $y=(x\cdot\sigma\varphi x)^4$ **(θ)** $y=x^4\cdot\tau\varepsilon\mu^2(3x)$

**(ι)** $y=\dfrac{e^x}{e^x+e^{-x}}$ **(ια)** $y=\varepsilon\varphi e^{3x^2}$ **(ιβ)** $y=\sqrt[7]{(x-2)^5}$

**Λύση**

**(α)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \eta\mu(3x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow y' &= (3x)'\cdot\sigma\upsilon\nu(3x)\\ &= 3\sigma\upsilon\nu(3x), \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

**(β)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \sigma\upsilon\nu^2(4x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow y' &= 2\cdot(4x)'\cdot\sigma\upsilon\nu^{2-1}(4x)\cdot(-\eta\mu(4x))\\ &= -2\cdot 4\cdot\sigma\upsilon\nu(4x)\cdot\eta\mu(4x)\\ &= -8\cdot\sigma\upsilon\nu(4x)\cdot\eta\mu(4x)\\ &= -4\cdot\eta\mu(8x),\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

**(γ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= (x^3-2x+6)^5,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow y' &= 5(x^3-2x+6)^4\cdot(x^3-2x+6)'\\ &= 5(x^3-2x+6)^4\cdot(3x^2-2),\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

**(δ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow y' &= \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

**(ε)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \eta\mu(e^x+\sigma\upsilon\nu x),\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow y' &= (e^x+\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu(e^x+\sigma\upsilon\nu x)\\ &= (e^x-\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu(e^x+\sigma\upsilon\nu x)\\ &\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

**(στ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= e^{\sqrt{x^2+3}},\ \forall x\in\mathbb{R} \\ \Longrightarrow y' &= (\sqrt{x^2+3})'\cdot e^{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{(x^2+3)'}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot e^{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}\cdot e^{\sqrt{x^2+3}} \\ &= \frac{x\cdot e^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}},\ \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

**(ζ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \sigma\varphi^5(x^2+1) \\ \Longrightarrow y' &= (x^2+1)'\cdot 5\cdot \sigma\varphi^{5-1}(x^2+1)\cdot \\ &\quad \cdot(-\sigma\tau\epsilon\mu^2(x^2+1)) \\ &= -10x\cdot\sigma\varphi^4(x^2+1)\cdot\sigma\tau\epsilon\mu^2(x^2+1) \end{aligned}$$

**(η)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= (x\cdot\sigma\varphi x)^4 \\ \Longrightarrow y' &= (x\cdot\sigma\varphi x)'\cdot(x\cdot\sigma\varphi x)^3 \\ &= (x'\cdot\sigma\varphi x + x\cdot(\sigma\varphi x)')\cdot(x\cdot\sigma\varphi x)^3 \\ &= (\sigma\varphi x + x\cdot(-\sigma\tau\epsilon\mu^2 x))\cdot(x\cdot\sigma\varphi x)^3 \\ &= (\sigma\varphi x - x\cdot -\sigma\tau\epsilon\mu^2 x)\cdot(x\cdot\sigma\varphi x)^3 \end{aligned}$$

**(θ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= x^4\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x) \\ \Longrightarrow y' &= (x^4)'\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x) + x^4\cdot(\tau\epsilon\mu^2(3x))' \\ &= (4x^3)\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x) + \\ &\quad +x^4\cdot(2\cdot(3x)'\cdot\tau\epsilon\mu(3x)\cdot \\ &\quad \cdot\tau\epsilon\mu(3x)\cdot\epsilon\varphi(3x)) \\ &= (4x^3)\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x) + \\ &\quad +6x^4\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x)\cdot\epsilon\varphi(3x) \\ &= 2x^3\cdot\tau\epsilon\mu^2(3x)\cdot(2+3x\cdot\epsilon\varphi(3x)) \end{aligned}$$

**(ι)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} \\ \Rightarrow y' &= \frac{(e^x)'\cdot(e^x+e^{-x})-(e^x)\cdot(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^x\cdot(e^x+e^{-x})-e^x\cdot(e^x+(-x)'e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1-e^{2x}+1}{(e^x+e^{-x})^2} \\ &= \frac{2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \end{aligned}$$

**(ια)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \epsilon\varphi(e^{3x^2}) \\ \Rightarrow y' &= (e^{3x^2})'\cdot\tau\epsilon\mu^2(e^{3x^2}) \\ &= (3x^2)'\cdot e^{3x^2}\cdot\tau\epsilon\mu^2(e^{3x^2}) \\ &= 6x\cdot e^{3x^2}\cdot\tau\epsilon\mu^2(e^{3x^2}) \end{aligned}$$

**(ιβ)** Έχουμε:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[7]{(x-2)^5} = (x-2)^{5/7} \\ \Rightarrow y' &= \frac{5}{7}\cdot(x-2)'\cdot(x-2)^{5/7-1} \\ &= \frac{5}{7}\cdot(x-2)^{-2/7} = \frac{5}{7\cdot\sqrt[7]{(x-2)^2}} \end{aligned}$$

**Άσκηση 3**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(3) = 5$.

**Λύση**[3] Η συνάρτηση $x \mapsto f(x^3 + x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση τέτοιων και $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(f(x^3 + x + 1))' = (x^3 + x + 1)' \cdot f'(x^3 + x + 1) = (3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x + 1)$$

Αλλά από υπόθεση είναι $f'(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ και αρα

$$(3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$$

και αφού $3x^2 + 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έπεται τελικά ότι

$$f'(x^3 + x + 1) = \frac{21x^2 - 1}{3x^2 + 1}$$

Για να βρούμε την τιμή της $f'(3)$, πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση $x^3 + x + 1 = 3$, δηλ. την $x^3 + x - 2 = 0$ (αν δηλ. έχει λύση και αν ναι, ειναι μοναδική;). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x^3 + x - 2 &= (x^3 + x^2 + 2x) + (-x^2 - x - 2) = x(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2) \\ &= (x - 1) \cdot (x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

και αρα

$$x^3 + x - 2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

(στο $\mathbb{R}$). Συνεπώς

$$f'(3) = \frac{21 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 + 1} = 5$$

**Άσκηση 4**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

**Λύση** Έχουμε:

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

(Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη της πιο πάνω σχέσης)

$$\begin{aligned} &\iff (\eta\mu x)' \cdot f'(\eta\mu x) + (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \\ &\iff \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \end{aligned}$$

[3] Λάμβάνουμε ως υπόθεση ότι $f'(x^3 + x + 1) = 21x^2 - 1$ για να βγαίνει $f'(3) = 5$ Η συνάρτηση που δίνεται στο σχολικό βιβλίο είναι μια αντιπαράγωγος της $x \mapsto 21x^2 - 1$

και αρα για $x = 0$ η πιο πάνω δίνει

$$\text{συν}0 \cdot f'(\text{ημ}0) - (\text{ημ}0) \cdot (\text{συν}0) = \text{συν}0 - \text{ημ}0,$$

δηλ. $f'(0) = 1$.

### Άσκηση 5

Η πλευρά $a$ (σε cm) ενός τετραγώνου δίνεται συναρτήσει του χρόνου $t$ (σε sec) από τη σχέση $a(t) = t^2 + 1$, $t > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή $t$ το εμβαδόν $E(t)$ του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 4t(t^2 + 1)$.
2. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του τετραγώνου τη στιγμή $t_0 = 1\,sec$.

**Λύση**

1. Αν $E : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $a \mapsto E(a) = a^2$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς $a$, τότε αφού με τη σειρά της η $a$ είναι συνάρτηση του χρόνου $t$, έχουμε μια σύνθετη συνάρτηση, ήτοι την $E \circ a$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,
$$(E \circ a)'(t) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = (t^2 + 1)' \cdot E'(a(t)) = 2t \cdot E'(a(t)).$$
Αλλά $E(a) = a^2(t) \Longrightarrow E'(a) = 2a$ και αρα, τελικά,
$$(E \circ a)'(t) = 4t \cdot (t^2 + 1), \quad t > 0.$$
2. Είναι
$$(E \circ a)'(1) = 4 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1) = 8\,cm^2/sec.$$

### Άσκηση 6

Ο όγκος ενός κύβου πλευράς $a$ αυξάνεται με ρυθμό $7\,cm^3/min$. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου ως συνάρτηση της πλευράς του $a$ και να βρείτε:

1. το ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς το χρόνο
2. το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς το χρόνο
3. το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου, όταν ο όγκος είναι $8\,cm^3$.

**Λύση** Αν $E$ και $V$ είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος ενός κύβου αντίστοιχα, ως συναρτήσεις της ακμής του, $a$, τότε ξέρουμε ότι $E(a) = 6a^2$, $a > 0$ και $V(a) = a^3$, $a > 0$. Υποθέτωντας ότι η πλευρά του είναι συνάρτηση του χρόνου $t$, δηλ. $t \mapsto a(t)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι

$$(E \circ a)'(t) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = a'(t) \cdot 12a(t)$$

και

$$(V \circ a)'(t) = a'(t) \cdot V'(a(t)) = a'(t) \cdot V'(a(t)) = a'(t) \cdot 3a^2(t)$$

Συνεπώς, αφού $V'(a(t)) = 7\ cm^3/min$, $\forall t > 0$, έχουμε

$$\boxed{a'(t) = \frac{7}{3a^2(t)}\ cm/min}$$

και τότε

$$\boxed{E'(a(t)) = \frac{28}{a(t)}\ cm^2/min}$$

Τέλος, για το τρίτο ερώτημα, αν $V(a(t_0)) = 8\,cm^3$, από πρίν

$$V(a(t_0)) = 8\,cm^3 \iff a(t_0) = \sqrt[3]{8} = 2\,cm$$

και αρα

$$\boxed{E'(a(t_0)) = \frac{28}{a(t_0)} = \frac{28}{2} = 14\ cm^2/min}$$

### Άσκηση 7

Σημείο $M$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή $t$ (σε λεπτά) δίνεται από τον τύπο $x(t) = 2t^2 - t$, $t \in [0, 10]$ ($x(t)$ σε μέτρα). Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου $M$ γίνεται ίσος με $5\,m/min$.

**Λύση** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως σύνθεση τέτοιων και από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(f \circ x)'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) = e^{2t^2-t} \cdot (4t - 1), \quad t \in [0, 1].$$

Είναι $f'(x(0)) = f'(0) = -1$ και ομοίως, $f'(x(1)) = f'(1) = 3e$. Έτσι, $f'(1) \cdot f'(0) < 0$ και εφαρμόζοντας το ΘΕΤ[4] στο διάστημα $[0, 3e]$ (και αφού $5 \in [0, 3e]$), έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 5\,m/min$.

### Άσκηση 8

Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή $t$ (σε $sec$) δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$,, με $t \in [0, 6]$. Να βρείτε:

1. το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης του σώματος (την ταχύτητα) τη στιγμή $t_1 = 5\,sec$
2. το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση) τη στιγμή $t_2 = 4\,sec$
3. ποιές χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο

**Λύση** Η ταχύτητα $v(t)$του κινούμενου σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\,sec$ είναι $v(5) = x'(5)$.

[4] **ΘΕΩΡΗΜΑ [Ενδιάμεσης Τιμής]**
Έστω $f$ συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$. Αν $k$ είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των τιμών $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει αριθμός $\xi \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = k$.

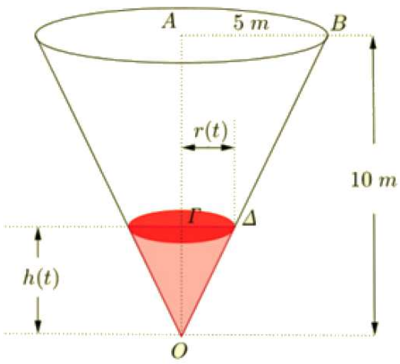
1. Τώρα, για κάθε $t \in [0,6]$ έχουμε
$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 18t + 24.$$
Συνεπώς, $v(5) = 9$ μονάδες μήκους ανα $sec$.

2. Η επιτάχυνση υ του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4\, sec$ είναι $v'(4)$. Αλλά, για κάθε $t \in [0,6]$ έχουμε $u(t) = v'(t) = 6(t-3)$ και αρα $u(4) = 6$ μονάδες μήκους ανα $sec^2$.

3. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο τη χρονική στιγμή $t \in [0,6]$ για την οποία η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν. Αλλά
$$\begin{aligned} v(t) = 0 \quad &\iff \quad 3t^2 - 18t + 24 = 0 \iff 3(t-4)(t-2) = 0 \\ &\iff \quad 3(t-4)(t-2) = 0 \iff (t = 0\, sec) \vee (t = 2\, sec) \end{aligned}$$

**Άσκηση 9**

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια κωνική δεξαμενή ύψους $10m$ με ακτίνα βάσης $5m$. Η δεξαμενή γεμίζει νερό με ρυθμό $2\, m^3/min$. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $4\, m$.




Σχήμα 2.1: Άσκηση 9/σελ.42

**Λύση** Αφού $O\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta \approx O\overset{\triangle}{A}B$, τότε
$$\frac{h(t)}{10} = \frac{r(t)}{5} \Longrightarrow r(t) = \frac{h(t)}{2}.$$
Η συνάρτηση του όγκου κατά τη χρονική στιγμή $t\, sec$ είναι η $V : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με
$$V(t) = \frac{\pi r^2(t) h(t)}{3} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h(t)}{2}\right)^2}{3} = \pi \frac{h^3(t)}{12}.$$
Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε για $t \geq 0$
$$V'(t) = 2 \iff \frac{\pi h^2(t)}{4} = 2 \iff h'(t) = \frac{8}{\pi h^2(t)}$$
και αρα $h'(4) = \frac{2}{2\pi}\ m/min$.