0.4 Δραστηριότητες σελ. 34 (Παράγωγος Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων)

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}x$, $x \in A = \mathbb{R} - \{x \,|\, \text{συν}x = 0\}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$ για κάθε $x \in A$.

Λύση

Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = \text{τεμ}x = \frac{1}{\text{συν}x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη (στο Π.Ο. της) ως πηλίκο 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων και μάλιστα

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot \text{συν}x - 1 \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{-(-\text{ημ}x)}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}x} \cdot \frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x} = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$$

και αφού το x ήταν τυχόν (στοιχείο του A), έπεται ότι $f'(x) = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$ για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 2\text{ημ}x - \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x\text{εφ}x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(γ) $f(x) = e^x \text{ημ}x$, $x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \frac{x^4}{4}\text{τεμ}x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(ε) $f(x) = \frac{\text{στεμ}x}{1 + \text{σφ}x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

(στ) $f(x) = \frac{1 - \text{συν}x}{1 + \text{ημ}x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$

(ζ) $f(x) = \frac{x\text{ημ}x}{x + 1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(η) $f(x) = \frac{1}{\text{ημ}x \cdot \text{συν}x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

(θ) $f(x) = x^2 e^x \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$

(ι) $f(x) = \frac{x\text{ημ}x + \text{συν}x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

Όλες οι συναρτήσεις που δίνονται είναι καλά ορισμένες, την επαλήθευση των οποίων αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη. Επίσης, όλες είναι παραγωγίσιμες στο π.ο. τους. Για τον υπολογισμό των παραγώγων συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε κανόνες παραγώγισης

(α) Έχουμε

$$f(x) = 2\text{ημ}x - \text{συν}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 2(\text{ημ}x)' - (\text{συν}x)' = 2\text{συν}x - (-\text{ημ}x) = 2\text{συν}x + \text{ημ}x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$f(x) = x \cdot \text{εφ}x,\ \forall x \in A \Rightarrow f'(x) = (x\text{εφ}x)' = (x)'\text{εφ}x + x(\text{εφ}x)' = \text{εφ}x + x \cdot \text{τεμ}^2 x,\ \forall x \in A.$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=e^x\eta\mu x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x) &= (e^x\eta\mu x)'=(e^x)'\eta\mu x+e^x(\eta\mu x)' \\ &= e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x \\ &= e^x\cdot(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x),\ \forall x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $A=\mathbb{R}-\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{x^4}{4}\cdot\tau\epsilon\mu x,\ \forall x\in A\Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{x^4}{4}\cdot\tau\epsilon\mu x\right)'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'\cdot\tau\epsilon\mu x+\frac{x^4}{4}\cdot(\tau\epsilon\mu x)' \\ &= \left(4\frac{x^3}{4}\right)\tau\epsilon\mu x+\frac{x^4}{4}\tau\epsilon\mu x\cdot\epsilon\varphi x \\ &= x^3\cdot\tau\epsilon\mu x\cdot\left(1+\frac{x}{4}\cdot\epsilon\varphi x\right),\quad x\in A \end{aligned}$$

(ε) Θέτουμε $A=\mathbb{R}-\left\{k\pi-\frac{\pi}{4}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{\sigma\tau\epsilon\mu x}{1+\sigma\varphi x},\ x\in A\Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{\sigma\tau\epsilon\mu x}{1+\sigma\varphi x}\right)'=\frac{(\sigma\tau\epsilon\mu x)'\cdot(1+\sigma\varphi x)-\sigma\tau\epsilon\mu x\cdot(1+\sigma\varphi x)'}{(1+\sigma\varphi x)^2} \\ &= \frac{-\sigma\tau\epsilon\mu x\cdot\sigma\varphi x\cdot(1+\sigma\varphi x)-\sigma\tau\epsilon\mu x\cdot(-\sigma\tau\epsilon\mu^2 x)}{(1+\sigma\varphi x)^2} \\ &= \sigma\tau\epsilon\mu x\frac{-\sigma\varphi x+\overbrace{(\sigma\tau\epsilon\mu^2 x-\sigma\varphi^2 x)}^{=1}}{(1+\sigma\varphi x)^2}=\sigma\tau\epsilon\mu x\frac{1-\sigma\varphi x}{(1+\sigma\varphi x)^2},\quad x\in A \end{aligned}$$

(στ) Θέτουμε $A=\mathbb{R}-\left\{2k\pi-\frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x},\ x\in A\Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\right)' \\ &= \frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'\cdot(1+\eta\mu x)-(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot(1+\eta\mu x)'}{(1+\eta\mu x)^2} \\ &= \frac{\eta\mu x\cdot(1+\eta\mu x)-(1-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2} \\ &= \frac{\eta\mu x+\overbrace{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x}^{=1}-\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2}=\frac{1+\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{(1+\eta\mu x)^2},\quad x\in A \end{aligned}$$

(ζ) Θέτουμε $A=\mathbb{R}-\{-1\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{x\eta\mu x}{x+1},\, x\in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{x\eta\mu x}{x+1}\right)' \\ &= \frac{(x\eta\mu x)'\cdot(x+1)-(x\eta\mu x)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{[(x)'\eta\mu x + x\cdot(\eta\mu x)']\cdot(x+1)-(x\eta\mu x)\cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)\cdot(x+1)-x\eta\mu x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x\cdot\eta\mu x+\eta\mu x + x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\eta\mu x + x^2\cdot\sigma\upsilon\nu x + x\cdot\sigma\upsilon\nu x}{(x+1)^2} = \frac{\eta\mu x + x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(x+1)}{(x+1)^2}, \quad x\in A \end{aligned}$$

(η) Θέτουμε $A=\mathbb{R}-\left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x},\, x\in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x}\right)' \\ &= \frac{(1)'\cdot(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)-1\cdot(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= \frac{(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x + (\eta\mu x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= -\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\frac{1}{4}\eta\mu^2(2x)} \\ &= 4\frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2(2x)}, \quad x\in A \end{aligned}$$

(θ) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x)=(x^2e^x)\sigma\upsilon\nu x,\, x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) &= \left[(x^2e^x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]' = (x^2e^x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x + (x^2e^x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' \\ &= [(x^2)'e^x + x^2(e^x)']\cdot\sigma\upsilon\nu x + (x^2e^x)\cdot(-\eta\mu x) \\ &= (2xe^x + x^2e^x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - (x^2e^x)\cdot\eta\mu x \\ &= x\cdot e^x\cdot(2+x)\sigma\upsilon\nu x - x^2e^x\cdot\eta\mu x \\ &= xe^x\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x), \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(ι) Έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(x)=\frac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x) &= \frac{(x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'e^x-(x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)(e^x)'}{e^{2x}}\\
&= \frac{[(x\cdot\eta\mu x)'+(\sigma\upsilon\nu x)']e^x-(x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)e^x}{e^{2x}}\\
&= e^x\cdot\frac{(\eta\mu x+x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)-(x\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)}{e^{2x}}\\
&= \frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x}\\
&= \frac{(x-1)\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\eta\mu x}{e^x},\quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x)+f''(x)=0$.

(β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)'=-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x.$$

Η συνάρτηση f' είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=(f'(x))'=(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)'=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=-f(x).$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $f(x)+f''(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(β) Είναι

$$
\begin{aligned}
\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2 &\iff \lambda\left(-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\\
&\iff -\lambda-2=2\iff\lambda=-4
\end{aligned}
$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x\le 0\\ \eta\mu x & x>0.\end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f'.

Λύση
Ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι η συνάρτηση ημίτονο άρα παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x+1$ ενώ ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f(x) = \text{συν}x$. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{ημ}x - \text{ημ}0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1$$

και

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x+1) = 0+1 = 1$$

και αρα $f'(0) = 1$. Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ 1 & x=0 \\ \text{συν}x & x>0. \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2\text{ημ}x + \text{συν}x, & x<0 \\ \\ x^2+x+1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Λύση
Ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων (ποιών;), άρα παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x\text{ημ}x + x^2\text{συν}x - \text{ημ}x$ ενώ ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x+1$. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 0+1 = 1$$

και

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\text{ημ}x + \text{συν}x - 1}{x}$$

Αλλά,

$$\lim_{x\to 0^-} x\text{ημ}x = 0\cdot\text{ημ}0 = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0,$$

άρα

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\text{ημ}x + \text{συν}x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\text{ημ}x + \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$$

δηλ. $f'_-(0) = 0$. Συνεπώς, αφού $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει. Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\text{ημ}x + x^2\text{συν}x - \text{ημ}x, & x<0 \\ \\ 2x+1 & x>0. \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x(\text{συν}x + \text{ημ}x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x).$$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{x}.$$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} f'(x) = [e^x(\text{συν}x + \text{ημ}x)]' &= (e^x)' \cdot (\text{συν}x + \text{ημ}x) + e^x \cdot (\text{συν}x + \text{ημ}x)' \\ &= e^x \cdot (\text{συν}x + \text{ημ}x) + e^x \cdot (-\text{ημ}x + \text{συν}x) \\ &= e^x \cdot [(\text{συν}x + \text{ημ}x) + (-\text{ημ}x + \text{συν}x)] \\ &= 2e^x \cdot \text{συν}x \end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned} f''(x) = (2e^x \cdot \text{συν}x)' &= 2(e^x \cdot \text{συν}x)' &= 2[(e^x)' \cdot \text{συν}x + e^x \cdot (\text{συν}x)'] \\ &= 2(e^x \cdot \text{συν}x - e^x \cdot \text{ημ}x) &= 2e^x(\text{συν}x - \text{ημ}x) \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x(\text{συν}x - \text{ημ}x) - 2(2e^x \cdot \text{συν}x) + 2e^x(\text{συν}x + \text{ημ}x) = \ldots = 0$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο της Παρεμβολής[2]

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| = |2\text{συν}x \cdot e^x| = 2|\text{συν}x \cdot e^x| = 2\underbrace{|\text{συν}x|}_{\leq 1} \cdot |e^x| \leq 2|e^x| = 2e^x$$

δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2e^x \leq f'(x) \leq 2e^x$$

και αφού

$$\lim_{x \to +\infty}(-2e^x) = -2 \lim_{x \to +\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty}(2e^x) = 2 \lim_{x \to +\infty} e^x = 0,$$

από το Κριτήριο Παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$$

[2]

Θεώρημα 0.1 (Κριτήριο της Παρεμβολής). *Έστω I ένα διάστημα και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε ανοικτή περιοχή του x_0 περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του I, διαφορετικό του x_0. Έστω επίσης συναρτήσεις f, g και h τέτοιες ώστε τα πεδία ορισμού τους να περιέχουν το I και όχι κατανάγκην το x_0. Τότε, αν για κάθε $x \in I$, $x \neq x_0$ ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = L = lim_{x \to x_0} h(x)$, τότε θα είναι και $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.*

(γ) Για να προσιορίσουμε την f''', μπορούμε να παραγωγίσουμε απευθείας την f'' ή να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος:

$$\begin{aligned} f''(x) = 2(f'(x) - f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R} &\implies f'''(x) = 2(f''(x) - f'(x)),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\implies f'''(x) = 2(2f'(x) - 2f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ (f''(x) = 2(f'(x) - f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}) &\implies f'''(x) = 2(2e^x \cdot \text{συν}x - e^x \cdot (\text{συν}x + \text{ημ}x)),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\implies f'''(x) = -4e^x \cdot \text{ημ}x,\ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4e^x \cdot \text{ημ}x}{x} = -4 \lim_{x\to 0} \frac{e^x \cdot \text{ημ}x}{x} = -4 \left(\lim_{x\to 0} e^x\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{x}\right) = -4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$$

Σημείωση: αφού η συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι συνεχής, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^{\lim_{x\to 0} x} = e^0 = 1.$$