0.3 Δραστηριότητες σελ. 28 (Παράγωγος βασικών συναρτήσεων)

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0).$$

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(β) Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + t^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η

$$f'(x) = 2x + 2t.$$

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x\sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(δ) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(ε) Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3e^x$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = \ln 2$ ισούται με 2.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Λύση

(α) ΛΑΘΟΣ Δίνουμε ενα αντιπαράδειγμα: Έστω $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 0$ και $g'(0) = 1$, όμως $(f \cdot g)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα $(f \cdot g)(1) = 1$ ενω $f'(1) \cdot g'(1) = 0$.

(β) ΛΑΘΟΣ Είναι $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x)

(γ) ΣΩΣΤΟ Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (δες Θεωρία). Στο σημείο $x = 0$ (δες Άσκηση 1/(α) της προηγούμενης παραγράφου) έχουμε ότι

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$

(δ) ΛΑΘΟΣ Οι f και g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

έχουν αμφότερες (ένα μόνο) σημείο ασυνέχειας, στο $x = 0$, άρα δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό. Αλλά η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι η σταθερή συνάρτηση =1 η οποία είναι παντού παραγωγίσιμη.

(ε) ΛΑΘΟΣ Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^x$ και αρα

$$f'(\ln 2) = 3e^{\ln 2} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 9,\ x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = 4x^2 - 6x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = 2x^3 + \dfrac{8}{x} - \sqrt{5},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(δ) $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2},\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ε) $f(x) = \dfrac{x^5}{e^{-x}},\ x \in \mathbb{R}$

(στ) $f(x) = e^x(2e^x - 3),\ x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$

(η) $f(x) = \dfrac{(x+4)^2}{x+3},\ x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες παραγώγισης

(α) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = (9)' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = (4x^2 - 6x + 7)' = 8x - 6 = 2(4x - 3), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \left(2x^3 + \frac{8}{x} - \sqrt{5}\right)' = 6x^2 - \frac{8}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(δ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)' = e^x - \frac{2}{x^3} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(ε) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \left(\frac{x^5}{e^{-x}}\right)' = (x^5 \cdot e^x)' = x^4 e^x \cdot (x+5) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(κανόνας παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων)

(στ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = (e^x(2e^x - 3))' = \left(2e^{2x} - 3e^x\right)' = e^x(4e^x - 3) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(κανόνας παραγώγισης γινομένου συναρτήσεων)

(ζ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \left(\frac{1-2x}{x^2+1}\right)' = 2\frac{x^2 - x + 1}{(x^2+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(η) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = \left(\frac{(x+4)^2}{x+3}\right)' = \left(\frac{x^2+8x+16}{x+3}\right)' = \frac{(x+4)\cdot(x+2)}{(x+3)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

(κανόνας παραγώγισης πηλίκου συναρτήσεων)

Άσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f', f'' και f'''.

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση f έτσι ώστε να είναι $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 2$.

Λύση

Για οποιεσδήποτε τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική)

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f''(x) &= 6\alpha x + 2\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'''(x) &= 6\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$f'''(1) = 2 \Rightarrow 6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

και αρα

$$f''(1) = 2 \Rightarrow 6\alpha + 2\beta = 2 \Rightarrow 2 + 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 0$$

και αρα

$$f'(1) = 2 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \Rightarrow 3\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 0 + \gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 1$$

Τέλος,

$$f(1) = 2 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} + 0 + 1 + \delta = 2 \Rightarrow \delta = \frac{2}{3}$$

Έτσι,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 4

Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 1$ και

$$g(1) \neq 0, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1.$$

(α) Να δείξετε ότι $f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$.

(β) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f'(1) = g'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f(1) \leq \frac{1}{4}$.

Λύση

(α) Υπάρχουν οι $f'(1)$, $g'(1)$ και αρα

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)}.$$

Από υπόθεση είναι

$$g(1) \neq 0, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(1)$$

και αυτό σε συνδυασμό με το πιο πάνω μας δίνουν

$$\frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = 1. \tag{2.3}$$

Στο πιο πάνω (αριθμητικό πηλίκο) έχουμε ότι $g^2(1) > 0$ και αφού το πηλίκο αυτό είναι $= 1 > 0$, τότε ο παρονομαστής του είναι γνησίως θετική ποσότητα, ήτοι $f'(1)g(1) - f(1)g'(1) > 0$, δηλ.

$$f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$$

.

(β) Αν επιπλέον $f'(1) = g'(1) = 1$, τότε η (2.3) δίνει

$$\frac{g(1) - f(1)}{g^2(1)} = 1 \Rightarrow g(1) - f(1) = g^2(1) \Rightarrow g^2(1) - g(1) + f(1) = 0$$

Αυτό μας λέει ότι ο αριθμός $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x + f(x) = 0$. Αλλά το σύνολο των ριζών της εξίσωσης αυτής περιέχεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλ. η εξίσωση $x^2 - x + f(x) = 0$ έχει πραγματικές λύσεις) αν και μόνο αν η διακρίνουσά του είναι ≥ 0, δηλ. αν $1 - 4f(1) \geq 0$, δηλ. αν

$$f(1) \leq \frac{1}{4}.$$