0.2 Δραστηριότητες σελ. 19 (Η παράγωγος ως Συνάρτηση)

Άσκηση 1

(α) Πότε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq A$ και πότε στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq A$;

(β) Τί ονομάζουμε $\nu-$οστή παράγωγο της $f : A \to \mathbb{R}$ και πώς τη συμβολίζουμε·

Λύση

(α) Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq A$ όταν είναι παραγωγίσιμη σε *κάθε* σημείο του διαστήματος (α, β).
Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq A$ όταν είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και επιπλέον τα όρια

$$f'_+(\alpha) := \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \qquad \text{και} \qquad f'_-(\beta) := \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$$

υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

(β) Αν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ως ν-**οστή παράγωγο της συνάρτησης** f ορίζουμε τη συνάρτηση $f^{(\nu)} : A_\nu \to \mathbb{R}$, όπου $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία διαστημάτων τέτοια ώστε $A_i \subseteq A_{i-1}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $A_i \subseteq A$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ η οποία ορίζεται (για $\nu \geq 2$) ως

$$x \mapsto f^{(\nu)}(x) = (f^{(\nu-1)}(x))'$$

Άσκηση 2

(α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

(α) Έστω $x \neq 0$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2x - 2(x+h)}{x \cdot (x+h)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{x \cdot (x+h) \cdot h} = -2 \lim_{h \to 0} \frac{1}{x \cdot (x+h)} \\
&= -2 \cdot \frac{1}{x \cdot (x+0)} = -\frac{2}{x^2}
\end{aligned}$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $-2/x^2$) για κάθε $x \neq 0$, έπεται ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}).$$

(β) Έστω $x \neq 0$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{2}{(x+h)^2}+\frac{2}{x^2}}{h} = -2\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2\cdot(x+h)^2}}{h} \\
&= -2\lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2\cdot h\cdot(x+h)^2} = -2\lim_{h\to 0}\frac{(x-(x+h))\cdot(x+(x+h))}{x^2\cdot h\cdot(x+h)^2} \\
&= 2\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h)}{x^2\cdot h\cdot(x+h)^2} = 2\lim_{h\to 0}\frac{2x+h}{x^2\cdot(x+h)^2} \\
&= 2\frac{2x+0}{x^2\cdot(x+0)^2} = \frac{4}{x^3}
\end{aligned}$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $4/x^3$) για κάθε $x \neq 0$, έπεται ότι η f' είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$(f'(x))' = \frac{4}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}-\{0\}),$$

δηλ.

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R}-\{0\}).$$

Άσκηση 3

(α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

(α) Έστω $x \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{(x+h)^3}{3}+\frac{(x+h)^2}{2}\right)-\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)}{h}$$

(μετά από μια σειρά στοιχειωδών πράξεων και αναδιατάξεων των όρων του αριθμητή στο πιο πάνω κλάσμα), το τελευταίο αυτό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{h\to 0}\frac{6x^2+6xh+2h^2+6x+3h}{6} = \frac{6x^2+6x}{6} = x^2+x$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με x^2+x) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της (το $\mathbb{R}$) με

$$f'(x) = x^2+x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(β) Έστω $x \neq 0$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^2+(x+h)]-(x^2+x)}{h}$$

(μετά από μια σειρά στοιχειωδών πράξεων και αναδιατάξεων των όρων του αριθμητή στο πιο πάνω κλάσμα), το τελευταίο αυτό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+1)=2x+1$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $2x+1$) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι η f' είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της (το $\mathbb{R}$) με

$$(f'(x))'=2x+1\quad (x\in\mathbb{R}),$$

δηλ.

$$f''(x)=2x+1\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Άσκηση 4

Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy,\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $a\in\mathbb{R}$ με $f'(a)=1+a$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Λύση

Θα την αναγάγουμε σε συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy[1] Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

---

[1]

Ορισμός 0.1. *Συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy λέγεται κάθε συναρτησιακή εξίσωση η οποία ικανοποιεί τη σχέση*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}.\tag{2.1}$$

Κάθε συνάρτηση η οποία αποτελεί λύση της (2.1) (ισοδύναμα της $f(x+y)-f(x)-f(y)=0$) λέγεται ***προσθετική συνάρτηση***.

Αποδεικνύουμε μερικά στοιχεία των συναρτησιακών εξισώσεων τύπου Cauchy, τα οποία εμπίπτουν στην ύλη της Β Λυκείου:

(1) Όλες οι συναρτησιακές εξισώσεις τύπου Cauchy στο πεδίο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ακριβώς οι γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $f(q)=c\cdot q$.

Απόδειξη. Για $x=0$, η συνθήκη της υπόθεσης δίνει (για σταθεροποιημένο $y\in\mathbb{Q}$) $f(0+y)=f(0)+f(y)$, δηλ. $f(0)=0$.
1η περίπτωση: Αν $q\in\mathbb{Q}$, $q>0$, δηλ. $q=m/n$, όπου $m,n\in\mathbb{N}$.
Εφαρμόζοντας διαδοχικά (επαγωγικά) την υπόθεση, έχουμε για $x\in\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(x+(x+\ldots+x))=f(x)+f(x+(x+\ldots+x))\\ &= f(x)+f(x)+f(x+\ldots+x)=\ldots=f(x)+f(x)+\ldots+f(x)=n\cdot f(x)\quad (*)\end{aligned}$$

Θέτοντας $y=x/n\Leftrightarrow ny=x$, το πιο πάνω δίνει $nf(y/n)=f(y)$ και πολλαπλασιάζοντας αμφότερα μέλη με m/n έχουμε

$$f\left(\frac{y}{n}\right)=\frac{m}{n}f(y)\overset{(*)}{=}f\left(\frac{m}{n}y\right)$$

δηλ. $f(qy)=qf(y)$, $\forall y\in\mathbb{Q}$. Για $x=1$, η τελευταία δίνει $f(q)=q\cdot f(1)$, δηλ. $f(q)=c\cdot q$, όπου $c=f(1)\in\mathbb{Q}$ σταθερά.
Αν $q\in\mathbb{Q}$ με $q<0$, τότε το αποτέλεσμα έπεται από το προηγούμενο βήμα και το ότι $f(0)=0$:
για $y=-x$, η συναρτησιακή εξίσωση δίνει $f(0)=f(-x)+f(x)$, δηλ. $f(-x)=-f(x)$ και αρα, αφού $(-q)\in\mathbb{Q}$, $(-q)>0$, έπεται ότι

$$f(q)=-f(-q)=-(c\cdot(-q))=c\cdot q.$$

□

τύπο
$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$
Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = f(x) + f(y) + xy - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= \left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right) + \left(f(y) - \frac{y^2}{2}\right) = g(x) + g(y) \end{aligned}$$
και αρα η g είναι μια συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy. Έτσι, αφού είναι παραγωγίσιμη στο a θα είναι και συνεχής εκεί (Θεωρία από την επόμενη παράγραφο) και αρα (αποδεικνύεται) θα είναι παντού συνεχής στο π.ο. της. Έτσι, (αποδεικνύεται) ότι $g(x) = c \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, δηλ.
$$f(x) = \frac{x^2}{2} + c \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Έτσι, η f είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με
$$f'(x) = c + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

(2) Δεν ισχύει πάντα ότι η συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy (όπου $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) είναι της μορφής $f(x) = c \cdot x$. Σε ειδικές όμως περιπτώσεις, αυτό όμως ισχύει. Μια από αυτές είναι και η (επιπλέον) υπόθεση η f να είναι συνεχής σε ενα σημείο (Darboux-1875):

• **Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι παντού συνεχής:**
Πράγματι, λόγω της συνέχειας της f στο x_0, έχουμε:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2.2}$$
Έστω $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$. Τότε η σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ δίνει
$$\begin{aligned} f(x - x_0 + y) &= f((x - x_0) + y) = f(x - x_0) + f(y) \\ &= f(x) + f(-x_0) + f(y) = f(x) - f(x_0) + f(y) \end{aligned}$$
και αρα
$$f(x - y + x_0) - f(x_0) = f(x) - f(y).$$
Έτσι, έχουμε
$$\begin{aligned} \lim_{x \to y} f(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x - x_0 + y) \\ &= \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0) + f(y)] \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(y) \\ &= f(x_0) - f(x_0) + f(y) = f(y) \end{aligned}$$
και αρα συνεχής στο $x = y$.

• **Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι της μορφής $f(x) = c \cdot x$ για κάποια πραγματική σταθερά c.**
Έπεται από τα προηγούμενα με ενα από επιχείρημα συνέχειας (λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς):
Έστω $x \in \mathbb{R}$ τυχόν. Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, θα υπάρχει μια ακολουθία $(q_n)_n$ ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \to x$. Τότε,
$$f(x) = f\left(\lim_{n \to +\infty} q_n\right) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{n \to +\infty} f(q_n) \overset{q_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}}{=} \lim_{n \to +\infty} (f(1) \cdot q_n) = \underbrace{f(1)}_{\equiv c} \cdot \lim_{n \to +\infty} (q_n) = c \cdot q.$$

Σημείωση: Δες και άσκηση 8.12 στο **(ΝΓΓ)**

Αλλά, $f'(a) = 1 + a$ και αρα $c = 1$. Έτσι,

$$f'(x) = 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Αν θέλαμε να κάνουμε την άσκηση πιο εύκολη (για μαθητές Β Λυκείου) μπορούμε π.χ. να βάλουμε ισχυρότερες συνθήκες για την f. Για παράδειγμα,

Άσκηση 4:

Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ας παρατηρήσουμε καταρχάς ότι $f(0) = 0$ και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1$$

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) + f(h) + xh - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) + xh}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}}_{=f'(0)=1} + \lim_{h\to 0} \frac{xh}{h} = 1 + \lim_{h\to 0} x = 1 + x\end{aligned}$$

και αρα η παράγωγος συνάρτηση f' της f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x) = 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$