Κεφάλαιο 10

Λύσεις των σχολικών ασκήσεων

0.1 Δραστηριότητες σελ. 16-17 (Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής)

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = -2$, στο σημείο $x_0 = 4$.

(β) $f(x) = -3x + 1$, στο σημείο $x_0 = -1$.

(γ) $f(x) = x^2 - x + 5$, στο σημείο $x_0 = 0$.

(δ) $f(x) = 1/x$, στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

(α) Κατ' αρχάς, $x_0 = 4 \in D(f)$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{-2-(-2)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{0}{x-4} = 0$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -2$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 4$ είναι ο $f'(4) = 0$.

(β) Κατάρχάς, $x_0 = -1 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x\to -1}\frac{-3x+1-(-3\cdot(-1)+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{-3(x+1)}{x+1}\\ &= -3\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x+1} = -3\cdot 1 = -3\end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = -1$ είναι ο $f'(-1) = -3$.

(γ) Κατ΄ αρχάς, $x_0 = 0 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+5-(0^2-0+5)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1\end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι ο $f'(0) = -1$.

(δ) Κατ΄ αρχάς, $x_0 = 1 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x(x-1)}\\ &= -\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x-1)} = -\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}}_{=1} = -1\end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}_*$ στο σημείο $x_0 = 1$ είναι ο $f'(1) = -1$.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |x^2 - 4|$ στο σημείο με $x_0 = 2$.

Λύση

Κατ΄ αρχάς, $x_0 = 2 \in D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι τμηματική. Για να την γράψουμε ως τμηματική, κάνουμε τον πίνακα προσήμου της **παράστασης** $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$:

x	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Έτσι

$$f(x) = |x^2-4| = \begin{cases} x^2-4, & (x \le -2) \vee (x \ge 2)\\ 4-x^2, & -2 < x < 2\end{cases}$$

Για να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ πρέπει (και αρκεί) τα πλευρικά όρια

$$f_+'(2) := \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \quad \text{και} \quad f_-'(2) := \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί και να είναι ίσα. Έχουμε:

$$f_{+}^{'}(2) = \lim_{x\to 2^{+}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^{+}} \frac{x^2-4-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^{+}} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

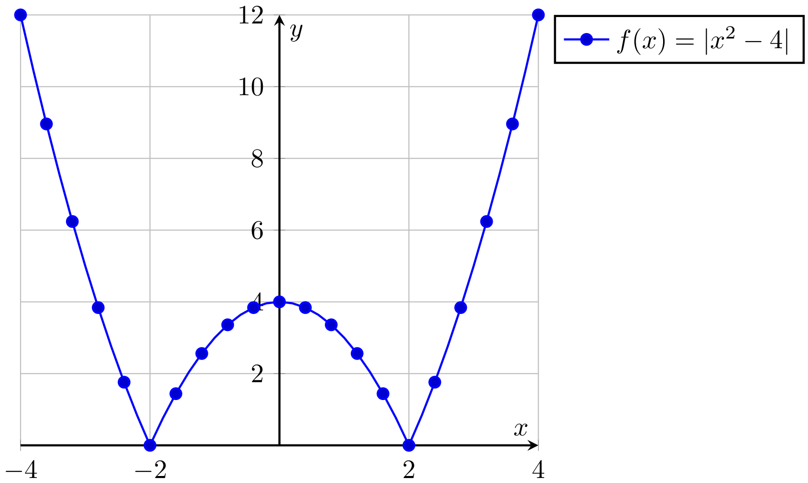
$$= \lim_{x\to 2^{+}} (x+2) = 2+2=4$$

και

$$f_{-}^{'}(2) = \lim_{x\to 2^{-}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^{-}} \frac{4-x^2-0}{x-2}$$

$$= -\lim_{x\to 2^{-}} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = -\lim_{x\to 2^{+}} (x+2) = -4$$

και αρα $f_{-}^{'}(2) \neq f_{+}^{'}(2)$. Συνεπώς, η $f'(2)$ δεν υπάρχει.
Δίνεται η μορφή του γραφήματος της f, αφού αυτό εξάγεται με χρήση των εργαλείων που ξέρουμε:



Άσκηση 3

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν δυο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = 1$ ισούται με 7.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

(γ) Αν $f'(x_0) < 0$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς το μέγεθος x είναι θετικός όταν $x = x_0$.

ΣΩΣΤΟ / **ΛΑΘΟΣ**

Λύση

(α) ΣΩΣΤΟ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

(β) ΣΩΣΤΟ. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+5x)-(1^2-5\cdot 1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+6)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1}(x+6) = 6+1=7
\end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$ είναι ο $f'(1)=7$.

(γ) ΛΑΘΟΣ. Προφανές.

Άσκηση 4

Η θέση S ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση εκφράζεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^2-4t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

(α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0,2]$.

(β) Πόση είναι η στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου όταν $t=2\,sec$;

Λύση

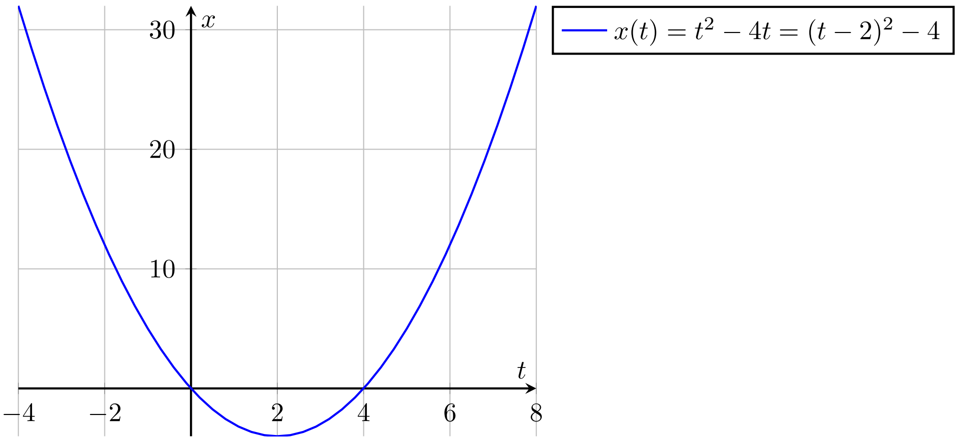
(α) Η μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0,2]$ είναι

$$\overline{u}=\frac{x(2)-x(0)}{2-0}=\frac{-4-0}{2}=-2m/sec.$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 2}\frac{x(t)-x(2)}{t-2} &= \lim_{t\to 2}\frac{(t^2-4t)-(2^2-4\cdot 2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{t^2-4t+4}{t-2} \\
&= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}(t+2)=2+2=4
\end{aligned}$$

και αρα η στιγμιαία ταχύτητα $x'(2)=u(2)$ του υλικού σημείου στο σημείο $t=2\,sec$ είναι $0m/sec$.



Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x}{x-2}, & x < 2 \\ -x^2 + k, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$.

Λύση

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Το $x_0 = 4$ ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[2, +\infty)$. Επίσης, $f(x_0) = f(4) = -4^2 + k = k - 16$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{(-x^2+k) - (-4^2+k)}{x-2} = \lim_{x\to 4} \frac{-x^2 + k + 16 - k}{x-4} \\ &= -\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} = -\lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} \\ &= -\lim_{x\to 4}(x+4) = -8 \end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός $f'(4)$ είναι ίσος με -8.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο x_0 είναι διπλάσιος από το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο 4, να βρείτε την τιμή του x_0.

Λύση

• Έστω $x_0 > 0$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{x_0}}{x-x_0} = 2\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}$$

(το οποίο όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου $0/0$ και αίρουμε την ανωμαλία)

$$\begin{aligned} &= 2\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = 2\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \\ &= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}} = \frac{2}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$f'(x_0) = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0}.$$

Συνεπώς, (ή ακολουθώντας τά ίδια βήματα με πρίν για $x_0 = 4$)

$$f'(4) = \frac{1}{2}.$$

Από υπόθεση, αν για ένα σημείο $x_0 > 0$ ισχύει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο αυτό είναι διπλάσιος από το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 4$, δηλ. $f'(x_0) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$, $\sqrt{x_0} = 1$, δηλ. $x_0 = 1$.

• Η $f'_+(0)$ δεν υπάρχει:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Άρα τελικά, $x_0 = 1$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x + |x|$.

(α) Να εξετάσετε κατα πόσο η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(β) Να εξετάσετε κατα πόσο η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(γ) Ποιό συμπέρασμα προκύπτει από τα **(α)** και **(β)**;

Λύση

(α) Είναι

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 2x+x, & x \geq 0 \\ \\ 2x-x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = \lim_{x\to 0^+}(3x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Αρα το $\lim_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Αλλά, $f(0) = 0$ και έτσι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$.

(β) Ελέγχουμε αν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο $x = 0$. Είναι

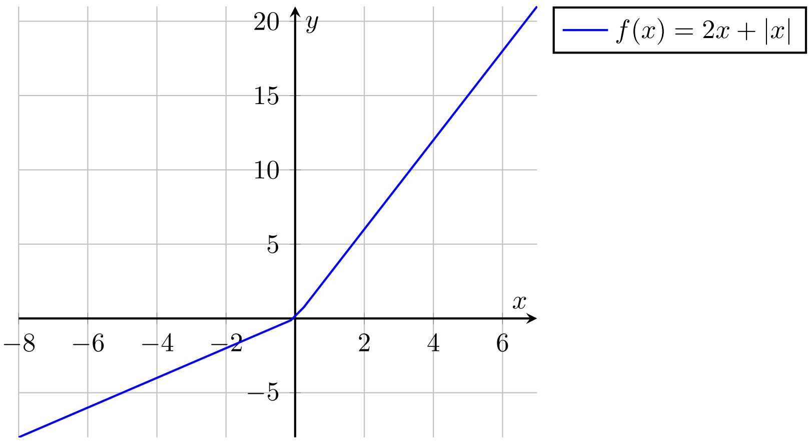
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{x} = 3$$

και αρα αφού $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ της f στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

(γ) Τα προηγούμενα ερωτήματα μας λένε ότι μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν ειναι κατανάγκην και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



Άσκηση 8

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0).$$

Λύση

Καταρχάς, αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, έπεται ότι το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Τώρα,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x_0) - x_0 f(x) + x_0 f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{xf(x_0) - x_0 f(x_0)}{x - x_0} + \frac{x_0 f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} \right)\end{aligned}$$

Αλλά
$$\lim_{x\to x_0}\frac{x_0 f(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}=-x_0\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-x_0\cdot f'(x_0).$$
Επίσης,
$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0 f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}}_{=1}=f(x_0).$$

Κατα συνέπεια, το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}$ υπάρχει και είναι ίσο με (τον αριθμό) $f(x_0)-x_0\cdot f'(x_0)$.