Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

Β Λυκείου (Κατεύθυνσης)

Λύσεις των σχολικών ασκήσεων

Ιωακείμ Ιωάννης | yiannis.ioakim.math@gmail.com | Εκπαιδευτικό κέντρο ΣυμμετρiΑ

Δραστηριότητες σελ. 56 (Πεπλεγμένη Συνάρτηση)

Άσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^2+2yx-y^2=0$ **(β)** $yx^2=3x+y$ **(γ)** $y=x+xe^y$

(δ) $y^2-2y\sqrt{1+x^2}+x^2=0$ **(ε)** $ημx+ημy=1$

Λύση

(α)

$$x^2+2yx-y^2=0$$

$$\overset{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} \frac{d(x^2+2yx-y^2)}{dx}=\frac{d(0)}{dx}$$

$$\iff \frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(2yx)}{dx}-\frac{d(y^2)}{dx}=0$$

$$\iff 2x+2x\frac{dy}{dx}+2y-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\iff (y-x)\frac{dy}{dx}=x+y$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{y-x}\quad (y\neq x)}$$

(β)

$$yx^2=3x+y$$

$$\overset{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} \frac{d(yx^2)}{dx}=\frac{d(3x+y)}{dx}$$

$$\iff x^2\frac{dy}{dx}+2xy=3+\frac{dy}{dx}$$

$$\iff (x^2-1)\frac{dy}{dx}=3-2xy$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{3-2xy}{x^2-1}\quad (x\neq \pm 1)}$$

(γ)

$$y=x+xe^y$$

$$\overset{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} \frac{dy}{dx}=\frac{d(x+xe^y)}{dx}$$

$$\iff \frac{dy}{dx}=1+e^y+xe^y\frac{dy}{dx}$$

$$\iff (1-xe^y)\frac{dy}{dx}=1+e^y$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1+e^y}{1-xe^y}}$$

(δ)

$$y^2-2y\sqrt{1+x^2}+x^2=0$$

$$\overset{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} 2y\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}-$$
$$-2y\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}+2x=0$$

$$\iff 2(y-\sqrt{1+x^2})\frac{dy}{dx}=$$
$$=\frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}}-2x$$

$$\iff (y-\sqrt{1+x^2})\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{y-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\quad (y\neq\sqrt{1+x^2})}$$

(ε)

$$ημx+ημy=1 \overset{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}}{\iff} συνx+συνy\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dx}=-\frac{συνx}{συνy}\quad (συνy\neq 0)}$$

Άσκηση 2

Αν $x^2y = \sigma\upsilon\nu(ax)$, να δείξετε ότι:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (a^2x^2+2)y = 0.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned}
x^2y = \sigma\upsilon\nu(ax) &\overset{\substack{\text{παραγωγίζω}\\ \text{πεπλεγμένα}}}{\iff} \frac{d(x^2y)}{dx} = \frac{d(\sigma\upsilon\nu(ax))}{dx} \iff 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = -(ax)'\cdot \eta\mu(ax)\\
&\iff 2xy + x^2\cdot\frac{dy}{dx} = -a\cdot\eta\mu(ax)\\
&\overset{\substack{\text{παραγωγίζω}\\ \text{πεπλεγμένα}}}{\iff} 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2\sigma\upsilon\nu(ax)\\
&\iff x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y + a^2\sigma\upsilon\nu(ax) = 0\\
\text{αφού } x^2y = \sigma\upsilon\nu(ax) &\iff x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y + a^2x^2y = 0\\
&\iff \boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (a^2x^2+2)y = 0}
\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Αν $e^y = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned}
e^y = e^x + e^{-x} &\overset{\substack{\text{παραγωγίζω}\\ \text{πεπλεγμένα}}}{\iff} e^y\frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} \overset{\substack{\text{παραγωγίζω}\\ \text{πεπλεγμένα}}}{\iff} e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x}\\
e^y = e^x + e^{-x} &\iff e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y\frac{d^2y}{dx^2} = e^y \iff e^y\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} - 1\right] = 0\\
e^y > 0,\ \forall y\in\mathbb{R} &\iff \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι

$$e^y = e^x + e^{-x} \iff e^{x+y} = e^{2x} + 1$$

και προχωράμε όπως πιο πάνω.

Άσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $xy = 2^x$ στο σημείο της με $x = 1$.

Λύση Έστω η καμπύλη $\{xy = 2^x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $xy = 2^x$. Για $x = 1$, έχουμε $y = 2$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την πιο πάνω εξίσωση:

$$xy = 2^x \iff y + x\frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2^x \ln 2 - y}{x} \quad (x \neq 0)$$

και αρα

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(1,2)} = \frac{2^1 \ln 2 - 2}{1} = 2(\ln 2 - 1)$$

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = 2(\ln 2 - 1) \cdot (x - 1) \iff y = 2(\ln 2 - 1)x + 4 - 2\ln 2$$

Ομοίως, αφού $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\vartheta.} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi.}} = \frac{1}{2(1-\ln 2)}$, βρίσκουμε ότι η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = \frac{1}{2(1 - \ln 2)} \cdot (x - 1) \iff x + 2(\ln 2 - 1)y + 3 - 4\ln 2 = 0$$

Άσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 = 4x$ στο σημείο της με $x = 4$ και τεταγμένη θετική.

Λύση Έστω η καμπύλη $C : \{y^2 = 4x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $y^2 = 4x$. **Η πεπλεγμένη αυτή εξίσωση δεν καθορίζει συνάρτηση** $x \mapsto y(x)$. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$2y\frac{dy}{dx} = 4 \iff y\frac{dy}{dx} = 2 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}, \quad (y \neq 0)$$

Το σημείο $x = 4$ ανήκει στον κλάδο της καμπύλης με εξίσωση $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ και αρα $y(4) = 4$. Επίσης,

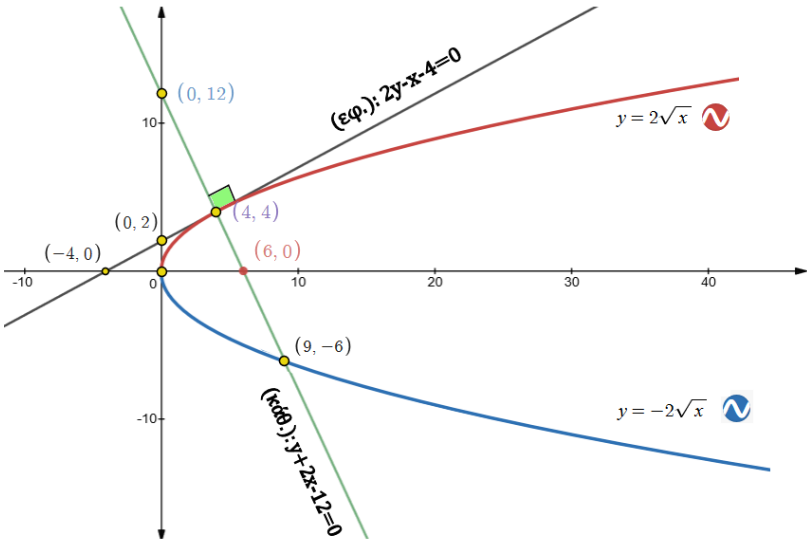
$$\lambda_{\varepsilon\varphi.} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{A(4,4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

και $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\vartheta.} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon\varphi.}} = -2$. Ετσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(4, 4)$ είναι η

$$y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4) \iff 2y - x - 4 = 0$$

και η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο ίδιο σημείο είναι η

$$y - 4 = -2(x - 4) \iff y + 2x - 12 = 0$$



Σχήμα 6: Άσκηση 5/σελ.56

Άσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $A(3\text{συν}\theta, 2\text{ημ}\theta)$.

Λύση Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(3\text{συν}\theta)^2}{9} + \frac{(2\text{ημ}\theta)^2}{4} = \text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1$$

και αρα το σημείο $A(3\text{συν}\theta, 2\text{ημ}\theta)$ ανήκει πράγματι στην καμπύλη. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{9}x + \frac{2}{4}y\frac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y}, \quad (y \neq 0).$$

και στο σημείο A είναι

$$\lambda_{\text{εφ.}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_A = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3\text{συν}\theta}{2\text{ημ}\theta} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$\begin{aligned} y - 2\text{ημ}\theta = -\frac{2}{3}\frac{\text{συν}\theta}{\text{ημ}\theta}(x - 2\text{συν}\theta) \quad &\Longleftrightarrow \quad 3\text{ημ}\theta(y - 2\text{ημ}\theta) = -2\text{συν}\theta(x - 3\text{συν}\theta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (3\text{ημ}\theta)y - 6\text{ημ}^2\theta = -(2\text{συν}\theta)x + 6\text{συν}^2\theta \\ &\Longleftrightarrow \quad (3\text{ημ}\theta)y + (2\text{συν}\theta)x = 6(\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta) \\ &\Longleftrightarrow \quad (3\text{ημ}\theta)y + (2\text{συν}\theta)x = 6. \end{aligned}$$

Ομοίως, αφού

$$\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = \frac{3\text{ημ}\theta}{2\text{συν}\theta},$$

βρίσκουμε ότι η εξίσωση της καθέτου στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$(3\text{ημ}\theta)x - (2\text{συν}\theta)y - 5\text{ημ}\theta \cdot \text{συν}\theta = 0$$

Άσκηση 7

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2+y^2-2y=1$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης είναι ίση με -1.

Λύση Έστω η καμπύλη $C : \{x^2+y^2-2y=1\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2-2y=1$. Είναι

$$x^2+y^2-2y=1 \iff 2x+2y\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=0 \iff (1-y)\frac{dy}{dx}=x \iff \frac{dy}{dx}=\frac{x}{1-y}, \quad (y\neq 1)$$

Αν (a,b) με $b\neq 1$ είναι σημείο του γραφήματος της καμπύλης στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με -1, τότε

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = -1 \iff \frac{a}{1-b} = -1 \iff b = a+1$$

Αλλά το σημείο (a,b) ανήκει στην καμπύλη C και αρα $a^2+b^2-2b=1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\begin{cases} b=a+1\\ b\neq 1\\ a^2+b^2-2b=1\end{cases} &\iff a^2+(a+1)^2-2(a+1)=1 \iff a^2+a^2+2a+1-2a-2=1\\ &\iff 2a^2=2 \iff a=\pm 1\end{aligned}$$

Για $a=1$ έχουμε

$$1^2+b^2-2b=1 \iff b(b-2)=0 \iff b=0,2$$

και για $a=-1$ έχουμε

$$(-1)^2+b^2-2b=1 \iff b(b-2)=0 \iff b=0,2.$$

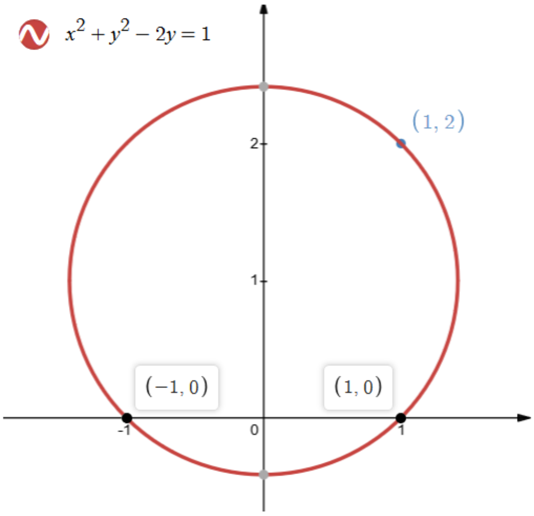
(ερώτηση: δώστε γεωμετρική ερμηνεία στο γιατί για τις δυο αυτές τιμές του a έχουμε τα ίδια b)
Έτσι, τα εν λόγω σημεία είναι τα $(1,2)$ και $(-1,0)$.

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $xy^5+x^5y-1=0$ δεν δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση Το σύνολο των σημείων του γραφήματος της καμπύλης στα οποία το γράφημά της δεν έχει οριζόντιες εφαπτομένες είναι το σύνολο

$$G = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} \,\middle|\, xy^5+x^5y-1=0,\ \frac{dy}{dx}\neq 0\right\}$$



Σχήμα 7: Άσκηση 7/σελ.56

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0,0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη αφού αν ανήκε, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωσή της, θα είχαμε $-1=0$, άτοπο.
Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $xy^5+x^5y-1=0:$

$$xy^5+x^5y-1=0 \Longleftrightarrow y^5+5xy^4\frac{dy}{dx}+5x^4y+x^5\frac{dy}{dx}=0 \Longleftrightarrow (5xy^4+x^5)\frac{dy}{dx}=-(5x^4y+y^5)$$

Αλλά, αφού το σημείο $(0,0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη, έπεται ότι $5x^4y+x^5\neq 0$ και αρα

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4y+y^5}{5xy^4+x^5}$$

και αφού $x\cdot y\neq 0$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, έπεται ότι ο αριθμητής $5x^4y+y^5$ της πιο πάνω δε μηδενίζεται για κανένα ζεύγος (x,y), δηλ. $\frac{dy}{dx}\neq 0$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2-xy+y^2=9$, στα οποία η στα οποία η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

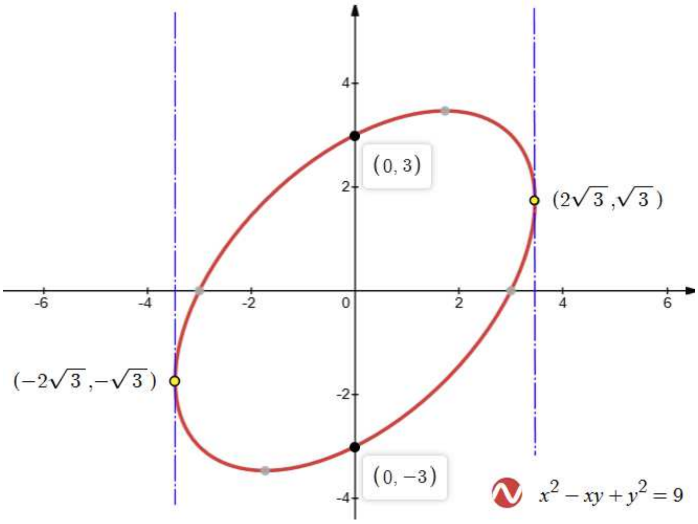
Λύση Το σύνολο των σημείων του γραφήματος μιας καμπύλης στα οποία το γράφημά της έχει κατακόρυφη εφαπτομένη είναι το σύνολο

$$G=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-xy+y^2=9,\ \nexists\frac{dy}{dx}\right\}$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $x^2-xy+y^2=9:$

$$x^2-xy+y^2=9 \Longleftrightarrow 2x-y-x\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0 \Longleftrightarrow (2y-x)\frac{dy}{dx}=y-2x$$

Αν $2y - x$, δηλ. $2y = x$, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση της καμπύλης, έχουμε $3y^2 = 9$, δηλ. $y = \pm\sqrt{3}$ και $x = \pm 2\sqrt{3}$. Στα σημεία $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ και $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ το γράφημά της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτόμενη.



Σχήμα 8: Άσκηση 9/σελ.56