Γενικές Ασκήσεις [Rolle/ΘΜΤ]

❶ Για τις πιο κάτω συναρτήσεις, να επαληθεύσετε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα που δίνεται:

$(i)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad x \in [0,2]$

$(ii)\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}, \quad x \in [-1,1]$

$(iii)\ f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{x}{3}, \quad x \in [0,9]$

$(iv)\ f(x) = ημx, \quad x \in [-\pi,\pi]$

❷ Βεβαιωθείτε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η παράγωγος κάθε μίας των ακόλουθων συναρτήσεων λαμβάνει την τιμή που δίνεται στο εν λόγω Θεώρημα, στο αναφερόμενο κάθε φορά διάστημα:

$(i)\ f(x) = x^2 + x, \quad x \in [-2,8]$

$(ii)\ f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \in [0,8]$

$(iii)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in [3,4]$

$(iv)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2}, \quad x \in [-5,3]$

Στο (iv), δώστε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

❸ Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τρις-παραγωγίσιμη, με $f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Τί συμπεραίνετε για την ύπαρξη ριζών της εξίσωσης $f'''(x) = 0$;

❹ Έστω η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια *πραγματική* λύση.

❺ Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - (\alpha+\beta)x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $(0,1)$.

❻ Δείξτε ότι για κάθε τιμή του α, η εξίσωση $x^4 + 32x + \alpha = 0$ έχει το πολύ 2 πραγματικές λύσεις.

❼ Αν f μια συνάρτηση, δις παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ τέτοια ώστε $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(c) = 0$.

❽ Έστω f μια δισπαραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε $f(0) = 3, f(1) = 1, f(4) = 7$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(c) > 0$.

❾ Δείξτε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = 2x$ και $g(x) = -συνx$ συναντώνται σε ένα και μόνο σημείο.

❿ Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει ακριβώς n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $(n \in \mathbb{N})$, δείξτε ότι και η συνάρτηση $f + cf'$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες (c πραγματική σταθερά).

⓫ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. η συνάρτηση f είναι σταθερή συνάρτηση (στο $\mathbb{R}$).

⓬ Βρείτε μια συνάρτηση $f: (-2,2) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = 5x^4$ και $f(0) = 1$.

⓭ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = f(x) \cdot συνx, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

⓮ Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln[f(x)] - 3x$ είναι σταθερή συνάρτηση και να βρείτε τον τύπο της f.

⓯ Έστω $f: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν $c \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(\xi)+f(\xi)=0$.

⓰ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ενα (τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{\alpha+\beta-2\xi}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

⓱ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $(\alpha<\beta)$ μια συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$, δηλ. στο (α,β). Δείξτε ότι η συνθήκη της ύπαρξης του $\lim_{x\to a} f'(x)$ συνεπάγεται την ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο με $x=\alpha$.

⓲ Έστω f μια περιττή και παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $c>0$, υπάρχει $\xi\in(-c,c)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(c)}{c}$.

⓳ Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=0$ και $f'(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι

$$f(x)\le x-1, x\in(0,+\infty).$$

Υπόδειξη: Μελετήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $x>1$ και $x<1$.

⓴ Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0)=1$ και $f'(x)\le 6, \forall x\in\mathbb{R}$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $f(3)$;

㉑ Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(6)=f(2)+20$, Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\ne x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=10$.

㉒ Αποδείξτε ότι $\forall\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{2\sqrt{\nu+1}}<\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}<\frac{1}{2\sqrt{\nu}}$$

㉓ Αποδείξτε ότι $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<1.$$

Ισχύει η πιο πάνω για $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;

㉔ Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,f(0))$ και $(1,f(1))$ του γραφήματος της f τέμνει το γράφημά της σε ένα σημείο $(\alpha,f(\alpha))$, όπου $\alpha\in(0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

㉕ Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,1)$ και συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο διακεκριμένα $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $f'(\xi_1)=-f'(\xi_2)$.

㉖ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, δις-παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)<0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

㉗ Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha\cdot\beta>0$. Τότε, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

㉘ Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha\ge 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε

$$\frac{f'(\xi_1)}{\alpha+\beta}=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}.$$

㉙ Έστωσαν οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\cdot g(x)\right).$$

㉚ Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια

$(i)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2-1}{x^5+x^2-x}$ $(ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}$ $(iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3 x}{x}$

(iv) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x$ $(v)\ \lim_{x\to 0^+}x^2\cdot\ln x$

㉛ Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια

$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3+4x^2-3x}{x^5+x^2-x}$ $(ii)\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+3}{4x-1}$ $(iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x^2}$

(iv) $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-3}{x}$ $(v)\ \lim_{x\to 0}\frac{4^x-3}{x^2}$ $(vii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

$(viii)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ $(ix)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x+\eta\mu x}$

$(x)\ \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)}{x^3}$

㉜ Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\cdot e^{-x^n}$$

για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό n.

㉝ Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}$$

όπου $\alpha>0$ σταθεροποιημένος αριθμός.

㉞ Αν

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-e^{-x}-e^{x}}{1-\sigma\upsilon\nu(cx)}=\frac{1}{2},$$

να βρείτε την τιμή της σταθεράς $c>0$.

㉟ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $f''(\xi)$ να υπάρχει για κάποιο $\xi\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$f''(\xi)=\lim_{c\to 0}\frac{f(\xi+c)-2f(\xi)+f(\xi-c)}{c^2}$$

Δείξτε ότι αν αφήσουμε την υπόθεση της ύπαρξης της $f''(\xi)$, τότε το πιο πάνω όριο μπορεί να μην υπάρχει.