2.1 Ορισμός (Διαμέριση κλειστού διαστήματος)

Διαμέριση του διαστήματος $I = [a, b]$ **μεγέθους** n λέγεται οποιαδήποτε διατεταγμένη n-άδα $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Τα κλειστά υποδιαστήματα του I που αντιστοιχούν σε μια διαμέριση $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ είναι τα $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in 1, 2, \ldots, n$ και καλούνται **η διαμέριση του** I. **Πλάτος** του διαστήματος $[x_{i-1}, x_i]$ καλείται η ποσότητα $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$. Τέλος, το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $I = [a, b]$ συμβολίζεται με $P([a, b])$.[α´]

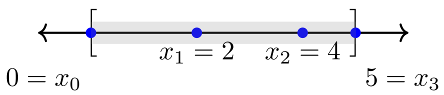
[α´] Ο όρος 'διαμέριση' χρησιμοποιείται εναλλάξ είτε για να δηλώσουμε το σύνολο των σημείων που αποτελούν τη διαμέριση είτε για τη διαμέριση αυτή καθε αυτή.

► **Παρατήρηση 2.2.1.** *Αξίζει να σημειώσουμε ότι*

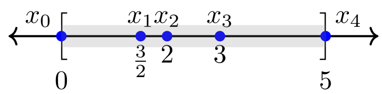
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Παραδείγματα 2.2.1.

(i) Μια διαμέριση του διαστήματος $[0, 5]$ μεγέθους $n = 4$, είναι η $P = \{0, 2, 4, 5\}$. η οποία το διαμερίζει στα υποδιαστήματα $[0, 2]$, $[2, 4]$ και $[4, 5]$.

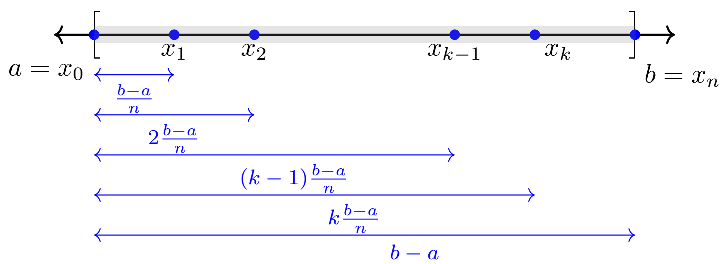


Μια άλλη διαμέρισή του μεγέθους $n = 4$, είναι η $Q = \{0, 3/2, 2, 3, 5\}$ η οποία το διαμερίζει στα υποδιαστήματα $[0, 1]$, $[3/2, 2]$, $[2, 3]$ και $[3, 5]$. Σε κάθε μια από τις πιο πάνω διαμερίσεις, τα πλάτη των υποδιαστημάτων είναι διαφορετικά.



(ii) **Η ομοιόμορφη διαμέριση** μεγέθους n ενός διαστήματος $[a, b]$.
Θέλουμε να τοποθετήσουμε $n - 1$ σημεία x_i μεταξύ των a και b έτσι ώστε $x_0 = a$, $x_n = b$ και η απόσταση Δ_k μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων x_k και x_{k+1} να είναι ίδια ($:= \Delta_n$). Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\boxed{\Delta_n = \frac{b-a}{n}} \quad \text{και} \quad \boxed{x_i = a + i\Delta_n = a + i\frac{b-a}{n}}\ ,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ .$$



Για παράδειγμα, η ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους $n = 7$ του διαστήματος $[-2, 5]$ είναι η

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

η οποία το διαμερίζει στα 7 υποδιαστήματα $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ και $[4, 5]$, κάθε ένα από τα οποία έχει πλάτος 1 μονάδα, αφού $\Delta_7 = \frac{5-(-2)}{7} = 1$.

2.2 Ορισμός (Ορισμένο Ολοκλήρωμα)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$ μια συνεχής συνάρτηση.
Έστω $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ η ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ μεγέθους n. Για κάθε επιλογή $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ορίζουμε ως το **Ορισμένο Ολοκλήρωμα της** f **(στο** $[a, b]$**)** το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n, \tag{2.1}$$

το οποίο συμβολίζεται με $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

▶ **Παρατηρήσεις 2.2.1.**

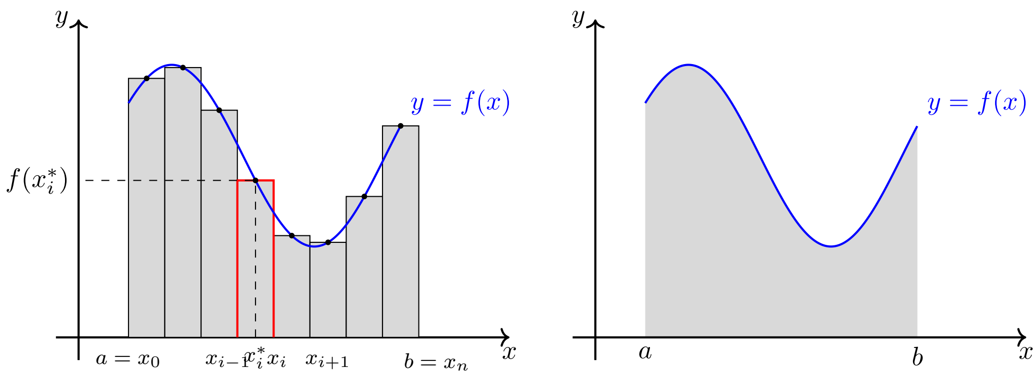
(i) Το πιο πάνω όριο είναι καλά ορισμένο (υπάρχει) λόγω της υπόθεσης της συνέχειας της συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και δίνει πάντα την ίδια τιμή άσχετα με την εκάστοτε επιλογή του $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(ii) Σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, είναι $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n$ αν και μόνο αν $\forall \epsilon > 0$ $\exists N \equiv N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \right| < \epsilon,$$

$\forall n \geq N$ και $\forall x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

(iii) Αν λοιπόν $f \geq 0$ στο διάστημα $[a, b]$, τότε το άθροισμα στην (2.1) εκφράζει το άθροισμα των στοιχειωδών ορθογωνίων στο εν λόγω διάστημα και αναπαριστά κατα προσέγγιση το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f. Το δε όριο (υποθέτωντας τη συνέχεια της συνάρτησης) είναι ακριβώς το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης f.



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

Στο συμβολισμό $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, η f καλείται η **υπο ολοκλήρωση συνάρτηση**, το a το **κάτω όριο (άκρο)** της ολοκλήρωσης και το b το **ανω όριο (άκρο)** της ολοκλήρωσης. Η διαδικασία εύρεσης του (αριθμού) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ λέγεται **ολοκλήρωση** (της f στο $[a, b]$).

► **Παρατήρηση 2.2.2.** *Δεν έχει σημασία το σύμβολο που επιλέγουμε για τη μεταβλητή στο ολοκλήρωμα:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \int_a^b f(t)\,dt \equiv \int_a^b f(u)\,du$$

κ.ο.κ.. Αυτό είναι πολύ σημαντικό για τον υπολογισμό, μέσω αντικατάστασης, Ορισμένων ολοκληρωμάτων στα οποία η προς ολοκλήρωση συνάρτηση παρουσιάζει κάποιας μορφής συμμετρία, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Παραδείγματα 2.2.2.

(i) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x\ln(1+x^4), \quad x \in [2,8].$$

Η f είναι συνεχής και αρα έχει νόημα το ολοκλήρωμα Riemann αυτής στο διάστημα $[2,8]$. Θεωρούμε την (ομοιόμορφη) διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[2,8]$,

$$x_0 = 2, \quad \Delta_n = \frac{8-2}{n} = \frac{6}{n},$$

δηλ.

$$x_i = 2 + i\cdot\Delta_n = 2 + i\cdot\frac{6}{n}, \quad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\int_2^8 f(x)\,dx &= \int_2^8 x\ln(1+x^4)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n x_i^*\ln(1+(x_i^*)^4)\cdot\frac{6}{n} \\
&= 6\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot\left(2+\frac{6i}{n}\right)\cdot\ln\left[1+\left(2+\frac{6i}{n}\right)^4\right]
\end{aligned}$$

(ii) Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \in [2,10].$$

Θεωρούμε την (ομοιόμορφη) διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[2,10]$,

$$x_0 = 2, \quad \Delta_n = \frac{10-2}{n} = \frac{8}{n},$$

δηλ.

$$x_i = 2 + i\cdot\Delta_n = 2 + i\cdot\frac{8}{n}, \quad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\int_2^{10} f(x)\,dx &= \int_2^{10} x\ln(1+x^4)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\cdot\Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{x_i^*}{1+(x_i^*)^2}\cdot\frac{8}{n} = 8\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{2+\frac{8i}{n}}{1+\left(2+\frac{8i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n} \\
&= 8\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^n \frac{n^2(2n+8i)}{n^2+(2n+8i)^2}.
\end{aligned}$$

Τα όρια στα προηγούμενα δύο παραδείγματα φαίνονται τρομακτικά, αφού περιέχουν άθροισμα!Από μόνα τους όμως τα αθροίσματα, για κατάλληλα μεγάλη τιμή του n αποτελούν μια ικανοποιητική προσέγγιση του ολοκληρώματος. Σε ειδικές όμως περιπτώσεις, το όριο υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψιν γνωστά σε μας αθροίσματα:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (2.2) \qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2.3)$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (2.4)$$

Παραδείγματα 2.2.3.

(i) Θα δείξουμε ότι

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2},$$

όπου $a < b$.

Κατ' αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x,\ x \in [a,b]$ είναι συνεχής και αρα (κατα Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[a,b]$: $\quad \Delta_n = \frac{b-a}{n}$. Τότε

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^*\cdot\Delta_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n} + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right) \\
&\overset{(2.2)}{=} (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n} + \frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= (b-a) \lim_{n\to+\infty} \left(a + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right) \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{b^2-a^2}{2}.
\end{aligned}$$

Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία του πιο πάνω αποτελέσματος λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{1}{2}(g(b)-g(a))$, όπου $g(x) = x^2$;

(ii) Θα δείξουμε ότι

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

Κατ' αρχάς, η συνάρτηση $f(x) = x^2,\ x \in [0,1]$ είναι συνεχής και αρα (κατα Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση μεγέθους n του διαστήματος $[0,1]$:

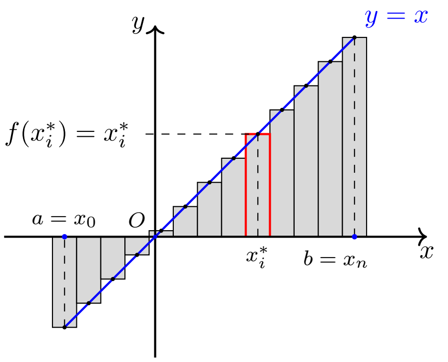
$$\Delta_n = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}.$$

Το κάθε x_i δίνεται από

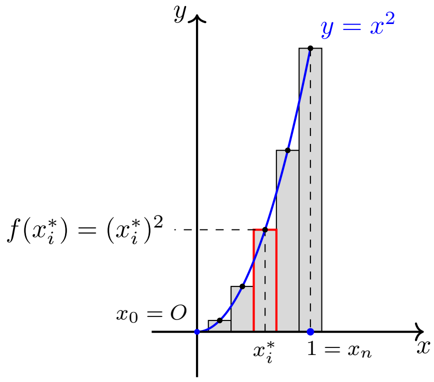
$$x_i = 0 + i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta_n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)^2 \cdot \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^3 \overset{(2.3)}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$



$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$