Τεχνικές Ολοκλήρωσης

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις
(και η αντικατάσταση του Weierstrass)

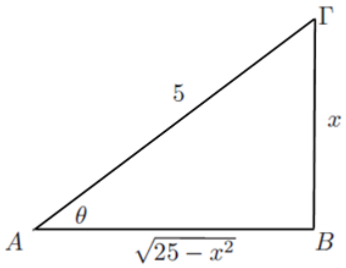
http://ioakimioannis.com

1. Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Κίνητρο: Θέλουμε να υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}\,dx.$$

Αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $u = 25-x^2$, το ολοκλήρωμα που θα προκύψει είναι αρκετά πολύπλοκο στους υπολογισμούς. Επίσης, ο μετασχηματισμός αυτός δεν είναι αντιστρέψιμος. Αν όμως παρατηρήσουμε ότι η ποσότητα $\sqrt{25-x^2}$ αποτελεί τη βάση ενός τριγώνου ΑΒΓ υποτείνουσας ΑΓ μήκους 5 μονάδων και ύψους ΒΓ$=x$, τότε



$\sin A = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{x}{5}$, όπου φυσικά $A \in (-\pi/2, \pi/2)$. Τότε $A = \arcsin(x/5)$, αφού $A \in (-\pi/2,\pi/2) \Rightarrow \cos A > 0$. Ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος στο διάστημα αυτό. Έτσι, θεωρώντας την αντικατάσταση $x(\theta) = 5\sin\theta \Rightarrow dx = 5\cos\theta d\theta$ είναι $\sin\theta = x/5$ και το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\boxed{\int d\theta = \theta + c = \arcsin(x/5) + c}\,.$$

Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει το σε ποια γωνία αντιστοιχεί τόξο ίσο με $x/5$. Επίσης, ο ίδιος μετασχηματισμός μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx.$$

Είναι

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx = 25 \in \cos^2\theta\,d\theta = \frac{25\theta}{2} + \frac{25}{4}\sin(2\theta) = \frac{25}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta).$$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x, είτε χρησιμοποιούμε το ανωτέρω τριγωνάκι είτε με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{5}\sqrt{25x^2},$$

αφού $\cos\theta > 0$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$. Συνεπώς,

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25}{2}\arcsin(x/5) + \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{x}{5}\sqrt{25-x^2} + c = \frac{25}{2}\arcsin(x/5) + \frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + c.$$

►**Παράδειγμα 1.7.1.** *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25+x^2}}.$$

Απάντηση

Θεωρούμε την αντικατάσταση

$$x(\theta) = 5\tan\theta \Rightarrow dx = 5\sec^2(\theta)\,d\theta$$

στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$. Είναι $\tan\theta = x/5$. Αφού

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) \Rightarrow \sec^2(\theta) = 1 + \frac{x^2}{25}$$

Πίνακας Τριγωνομετρικών Αντικαταστάσεων	
Η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει εκφράσεις της μορφής:	**Αντικατάσταση**
$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, \quad \lvert x\rvert \le a, \quad a > 0$	$x(\theta) = a\sin\theta, \ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ (\cos\theta \ge 0)$
$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx, \quad a > 0$	$x(\theta) = a\tan\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ (\sec\theta > 0)$
$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx, \quad \lvert x\rvert \ge a, \quad a > 0$	$x(\theta) = a\sec\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \ (\tan\theta \ge 0)$

και αφού $\cos\theta \geq 0$ στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$, είναι

$$\sec(\theta) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{25 + x^2}$$

δηλ.

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sec(\theta)} = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2}}$$

.Συνεπώς, το πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned}
\int \frac{5\sec^2(\theta)\, d\theta}{5\tan^2(\theta)\sqrt{25 + 25\tan^2(\theta)}} &= \frac{1}{25}\int \frac{\sec^2(\theta)\, d\theta}{\tan^2(\theta)\sec(\theta)} = \frac{1}{25}\int \frac{\sec(\theta)\, d\theta}{\tan^2(\theta)} \\
&= \frac{1}{25}\int \frac{\cos(\theta)\, d\theta}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{25}\int \frac{(\sin(\theta))'\, d\theta}{\sin^2(\theta)} \\
&= -\frac{1}{25\sin(\theta)} + c = -\frac{\csc(\theta)}{25} + c
\end{aligned}$$

και για να επιστρέψουμε στην αρχική μας μεταβλητή x, αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό. Προς τούτο, κάνουμε χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων (ο μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος στο αναφερόμενο διάστημα)

$$\tan(\theta)\cdot\cos(\theta) = \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{x}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{25 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 + x^2}}$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 + x^2}} = -\frac{\sqrt{25 + x^2}}{25x} + c}.$$

◄

►**Παράδειγμα 1.7.2.** *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση $x = \sin\theta, \ \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \Leftrightarrow \theta = \arcsin x, \ \ |x| \leq 1$. Είναι $dx = \cos\theta\, d\theta$ και $\sqrt{1 - x^2} = \cos\theta$. Τότε, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_\theta = \int \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta,$$

το οποίο υπολογίσαμε στο παράδειγμα (1.5.2):

$$\begin{aligned} I_\theta &= \frac{1}{5}\cos^5\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta + c = \frac{1}{15}\cos^3\theta(3\cos^2\theta - 5) + c \\ &= \frac{1}{15}\cos^3\theta(3\sin^2\theta - 2) + c. \end{aligned}$$

Αντιστρέφουμε την αντικατάσταση:

$$I = -\frac{1}{15}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2+2) + c.$$

Το I υπολογίζεται και με χρήση της αντικατάστασης $x = \cos\theta$. Στην περίπτωση αυτή, καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα:

$$I_\theta = \int \cos^3\theta \cdot \cos^2\theta \, d\theta,$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα και δίνει

$$I_\theta = \frac{1}{5}\sin^5\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + c.$$

Αντιστρέφοντας την αντικατάσταση, καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με πρίν.
Διαφορετικά, χωρίς τη χρήση τριγωνομετρικής αντικατάστασης, το I υπολογίζεται μέσω της αντικατάστασης $u = 1 - x^2$. ◄

Άσκηση 1.7.1. *Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα με χρήση της αντικατάστασης που δίνεται:*

(i) $I_1 = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\, dx \quad (x = 3\sin\theta)$

(ii) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}\, dx \quad (x = 5\sin\theta)$

(iii) $I_3 = \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\, dx \quad (x = 4\sec\theta)$

(iv) $I_4 = \int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}} \quad (x = \frac{3}{2}\sec\theta)$

(v) $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} \quad \left(\frac{x+1}{2} = \sin\theta\right)$

Απάντηση:

(i) $I_1 = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + c$

(ii) $I_2 = -\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + c$

(iii) $I_3 = \sqrt{x^2-16} - 4\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right) + c = \sqrt{x^2-16} - 4\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{4}\right) + c$

(iv) $I_4 = -\frac{|x|}{9\sqrt{4x^2-9}} + c$

(v) $I_5 = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$

1.1 Η αντικατάσταση του Weierstrass

Η αντικατάσταση του Weierstrass[3] ή αλλιώς αντικατάσταση εφαπτομένης του ήμισυ της γωνιάς, χρησιμοποιείται στον υπολογισμό ολοκληρώματος συνάρτησης η οποία είναι πηλίκο τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ως προς x) μετατρέποντάς την σε ρητή συνάρτηση (ως προς t). Η αντικατάσταση που υλοποιεί το πιο πάνω είναι η

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\arctan t. \tag{1.7}$$

Με χρήση των γνωστών μας τριγωνομετρικών τύπων

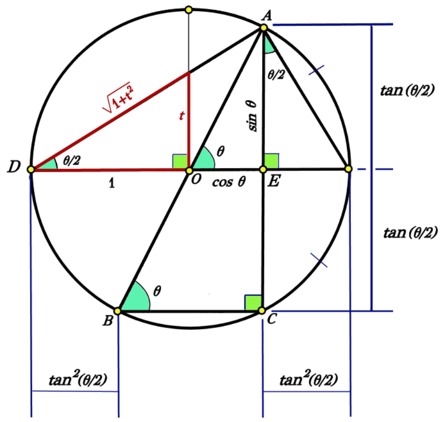
$$\boxed{\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}, \qquad \boxed{\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}},$$

το ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

γίνεται[4]

$$\int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$



Σχήμα 1.1: Η αντικατάσταση του Weierstrass

Επιπλέον,

$$\boxed{\tan x = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1-t^2}}, \qquad \boxed{\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1-t^2}{2t}}$$

και

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1+t^2}{1-t^2}}, \qquad \boxed{\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1+t^2}{2t}}.$$

[3]Φέρει το όνομα του Γερμανού Μαθηματικού Karl Weierstrass (1815-1897).

[4]Είναι:

$$\begin{aligned} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad &\Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2}\sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{2}(1+t^2)\, dx \\ &\Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt. \end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα εξάγεται και από την

$$x = 2\arctan t \Rightarrow dx = 2\, d(\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Αν και ο Michael Spivak αναφέρεται στην αντικατάσταση αυτή[5], ως την πιο ΄ύπουλη αντικατάσταση στον κόσμο΄, η πιο κάτω ερμηνεία ρίχνει φώς στο μυστήριο της προέλευσής της:

▶ Θεωρούμε το μοναδιαίο κύκλο $(C) : x^2 + y^2 = 1$. Κάθε ευθεία $(\epsilon) : y = \lambda x + b$, η οποία περνά από σημείο του κύκλου (x_0, y_0), θα τέμνει τον κύκλο σε ακόμη ένα σημείο. Έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $(x_0, y_0) = (-1, 0)$. Τότε, $b = \lambda$ και τότε, η εξίσωση της ευθείας γίνεται $(\epsilon) : y = \lambda(x + 1)$.
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου, έχουμε $x^2 + \lambda^2(x+1)^2 = 1$, δηλ. $(\lambda^2+1)x^2 + 2\lambda^2 x + (\lambda^2 - 1) = 0$. Προφανώς, το $x = -1$ είναι λύση της πιο πάνω εξίσωσης και αρα η πιο πάνω γράφεται:

$$(x + 1)((\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 - 1) = 0.$$

Έτσι, το πιο πάνω μηδενίζεται και για x ώστε $(\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$, δηλ. για το

$$x = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2 + 1}.$$

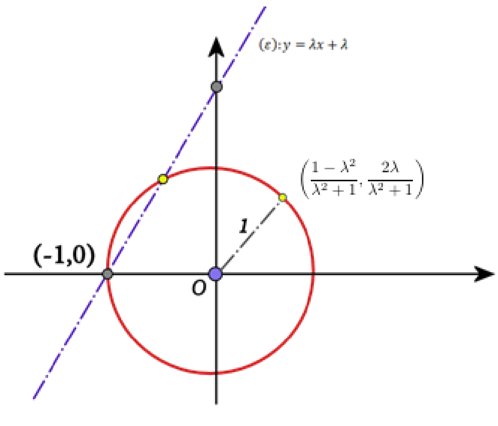
Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ευθείας,

$$y = \lambda \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2 + 1} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Άρα, το δεύτερο σημείο στο οποίο η (ϵ) τέμνει τον κύκλο (C) είναι το $\left(\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2+1}, \frac{2\lambda}{\lambda^2+1}\right)$. Εύκολα βλέπουμε ότι σημεία της πιο πάνω μορφής ικανοποιούν την εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Θεωρώντας παραμέτρηση του κύκλου σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\sin x = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}, \qquad \cos x = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2 + 1}.$$

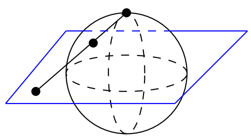
Μπορούμε να σκεφτούμε την πιο πάνω παραμέτρηση ως εξής: αν 'αφαιρέσουμε' ένα σημείο από



Σχήμα 1.2: Ρητή παραμέτρηση του μοναδιαίου κύκλου

τον κύκλο (π.χ. το $(-1, 0)$) τότε η προκύπτουσα καμπύλη 'είναι' μια ευθεία.[6]

[5] *Spivak M.*, Calculus, Cambridge University Press, 2006, σελ. 382–383.
[6] Το ανάλογο στις τρείς διαστάσεις είναι η λεγόμενη στερεογραφική προβολή, όπου μπορούμε να προβάλουμε μια σφαίρα στο επίπεδο και το αποτέλεσμα της προβολής αυτής είναι ενας κύκλος.



Τα επ' άπειρον 'σημεία', δηλ. τα σημεία τα οποία η ευθεία που ενώνει το $(-1,0)$ με ενα σημείο του κύκλου έχει άπειρη κλίση, αντιστοιχούν στο σημείο $(-1,0)$. Αλλά και αντίστροφα, κάθε σημείο του κύκλου γράφεται στην πιο πάνω μορφή. Αυτή η παραμέτρηση ανήκει σε μια ειδική κατηγορία παραμετρήσεων, των λεγόμενων **ρητών παραμετρήσεων**.
Γενικότερα, για τον κύκλο $(C) : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ $(R>0)$, η ρητή του παραμέτρηση είναι το ζεύγος

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_0 + R\dfrac{1-\lambda^2}{\lambda^2+1} \\ \\ y(\lambda) = y_0 + R\dfrac{2\lambda}{\lambda^2+1} \end{cases}.$$

◀

▶Παράδειγμα 1.7.3. *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 1}$$

με χρήση της αντικατάστασης (1.7).

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση (1.7) και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+1}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt &= 2\int\frac{1+t^2}{4t^4-4t^2+4}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4-t^2+1}\,dt &= \frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{(t^2-\sqrt{3}t+1)\cdot(t^2+\sqrt{3}t+1)}\,dt \end{aligned}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{1+t^2}{(t^2-\sqrt{3}t+1)\cdot(t^2+\sqrt{3}t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+\sqrt{3}t+1}+\frac{1}{t^2-\sqrt{3}t+1}\right).$$

Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε:

$$\int\frac{dt}{t^2\pm\sqrt{3}t+1} = 2\arctan\left(2t\pm\sqrt{3}\right)+C.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4-t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\left(\arctan\left(2t+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2t-\sqrt{3}\right)\right)+c.$$

Τέλος, αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό:

$$I = \frac{1}{2}\left[\arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}\right)+\arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\right)\right]+c. \tag{1.8}$$

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του πιο πάνω ολοκληρώματος είναι αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $t=\tan x$. Τότε $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ και

$$t = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow t^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{1}{3\frac{1}{1+t^2}+1}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t/2)}{1+(t/2)^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan(t/2)+c \end{aligned}$$

και αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό:

$$I = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan x\right) + c. \tag{1.9}$$

Οι (1.8) και (1.9) συμφωνούν: χρησιμοποιήστε το γνωστό αποτέλεσμα:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right), & \text{αν } xy < 1 \\ \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + \pi, & \text{αν } x > 0, y < 0 \text{ και } xy > 1 \\ \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) - \pi, & \text{αν } x < 0, y < 0 \text{ και } xy > 1 \end{cases}.$$

◄

►Παράδειγμα 1.7.4. *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{dx}{(1+\sin x)^2}$$

με χρήση της αντικατάστασης (1.7).

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση (1.7) και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1+t^2}{(t^2+2t+1)^2}\,dt \\ &= 2\int \frac{1+t^2}{(t+1)^4}\,dt \end{aligned}$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{1+t^2}{(t+1)^4} = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^3} + \frac{2}{(t+1)^4}$$

και αρα

$$2\int \frac{1+t^2}{(t+1)^4}\,dt = -\frac{2}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{4}{3(t+1)^3}.$$

Αντιστρέφουμε την αντικατάσταση:

$$I = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2}{3\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)^3} + c.$$

Αν φυσικά έχετε την υπομονή, χρησιμοποιήστε τους τριγωνομετρικούς τύπους που αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου και βρείτε την αντίστοιχη έκφραση του ολοκληρώματος συναρτήσει ημιτόνων και συνημιτόνων:

$$I = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(\cos x+1)(3\sin x - \cos x + 5)}{(\sin x+1)(\sin x + \cos x + 1)} + c.$$

◄

►► **Εφαρμογή**
Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \operatorname{csec} x \, dx$$

με χρήση της αντικατάστασης (1.7).

Απάντηση:

$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{csec} x \, dx = \int \frac{dx}{\sin x} &&= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt \\ &= \int \frac{dt}{t} &&= \ln |t| + c \\ &= \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| + c \end{aligned}$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα συμφωνεί με τον (1.4). Για να το δείτε αυτό, χρησιμοποιήστε τον τριγωνομετρικό τύπο

$$\tan x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}.$$

◄◄

►► **Εφαρμογή**
Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}, \ (a, b) \neq (0, 0)$.

Αν $c = 0$, **τότε**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &&= \int \frac{1}{\frac{2at}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \, dt \\ &= 2 \int \frac{dt}{2at + b - bt^2} &&= \frac{2}{b} \int \frac{dt}{1 + \frac{4a^2}{b^2} - \left(t - \frac{a}{b}\right)^2} \\ &= -\frac{2}{b} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{a}{b}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $u = t - \dfrac{a}{b}$ και το πιο πάνω γράφεται:

$$I_u = -\frac{2}{b} \int \frac{du}{u^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right)^2} = -\frac{2}{b} \int \frac{du}{\left(u - \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right) \cdot \left(u + \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right)}.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{1}{\left(u - \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right) \cdot \left(u + \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}\right)} = \frac{b}{2\sqrt{b^2 + 4a^2}} \left(\frac{1}{u - \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}} - \frac{1}{u + \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}} \right)$$

και αρα

$$I_u = \frac{1}{\sqrt{b^2+4a^2}} \ln \left| \frac{u + \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}}{u - \sqrt{\frac{b^2+4a^2}{b}}} \right| + c.$$

Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό και παίρνουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2+4a^2}} \ln \left| \frac{b\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{b^2+4a^2} - a}{b\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{b^2+4a^2} - a} \right| + c.$$

Αν $c \neq 0$, **τότε** διακρίνουμε δυο περιπτώσεις: αν $c^2 > a^2 + b^2$, τότε εύκολα βρίσκουμε ότι

$$I = \frac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \cdot \arctan\left(\frac{(c-a)\tan\left(\frac{x}{2}\right) + b}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \right) + c.$$

Η περίπτωση $c^2 < a^2 + b^2$ αφήνεται ως άσκηση.

Αν $a = b = 1$ και $c = 0$, τότε $I = x + C$ ενω αν $a = b = 1$ και $c \neq 0$, τότε $I = \frac{1}{1+c}x + C$.
◀◀

▶**Παράδειγμα 1.7.5.** *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + 2}.$$

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση (1.7). Τότε

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\sin x + 2} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 2} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2\,dt}{2(t^2+t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t+1}. \end{aligned}$$

Αλλά, (δες (1.1))

$$\int \frac{dt}{t^2+t+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\sqrt{3}\frac{2t+1}{3} \right) + c.$$

Συνεπώς,

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\sqrt{3}\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{3} \right) + c.$$

◀

▶**Παράδειγμα 1.7.6.** *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{dx}{2\cos x + 1}.$$

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση (1.7). Τότε

$$I = \int \frac{dx}{2\cos x + 1} = \int \frac{1}{2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{-2\,dt}{t^2-3}.$$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{-2}{t^2-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t-\sqrt{3}}\right)$$

και αρα

$$\int \frac{-2\,dt}{t^2-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t+\sqrt{3}}{t-\sqrt{3}}\right| + c.$$

Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό:

$$I = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\sqrt{3}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}}\right| + c = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sin x+\sqrt{3}(\cos x+1)}{\sin x-\sqrt{3}(\cos x+1)}\right| + c.$$

◀

Άσκηση 1.7.2. *Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα*

$$I = \int \frac{dx}{5\sin x + 3\cos x + 3}.$$

Απάντηση
Θεωρούμε την αντικατάσταση (1.7). Τότε

$$I = \int \frac{dt}{5t+3} \quad = \quad \frac{1}{5}\int \frac{d(5t+3)}{5t+3} \quad = \quad \frac{1}{5}\ln|5t+3| + c.$$

Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό:

$$I = \frac{1}{5}\ln\left|5\tan\left(\frac{x}{2}\right)+3\right| + c \quad = \quad \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5\sin x + 3(1+\cos x)}{1+\cos x}\right| + c.$$

◀

Άσκηση 1.7.3. *Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα:*

(i) $I_1 = \int \frac{dx}{\sec x + 1}$ **(ii)** $I_2 = \int \frac{dx}{\csc x + 1}$.

Απάντηση: Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση του Weierstrass και βρίσκουμε:

(i) $I_1 = x - \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$ **(ii)** $I_2 = x + \frac{2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c.$

Άσκηση 1.7.4. *Να υπολογιστεί το πιο κάτω ολοκλήρωμα με χρήση της αντικατάστασης του Weierstrass ή με χρήση της αντικατάστασης* $t = \tan x$:

$$I_1 = \int \frac{dx}{3\sin^2 x + 1}.$$

Απάντηση:

$$I = \frac{1}{2}\arctan(2\tan x) + c.$$

Άσκηση 1.7.5. *Να υπολογιστούν τα πιο κάτω ολοκληρώματα:*

(i) $I_1 = \int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$ **(ii)** $I_2 = \int \frac{dx}{\cos x + \tan x}$.

Απάντηση:

(i) Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση του Weierstrass (στην περίπτωση αυτή, έχουμε τον πιο σύντομο υπολογισμό) και βρίσκουμε:

$$I_1 = \ln|\tan(x/2)| - \frac{1}{2}\tan^2(x/2) + c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| - \frac{1}{1+\cos x}\right) + c.$$

Διαφορετικά, θεωρούμε την αντικατάσταση $t = \tan x$.
Εναλλακτικά, γράφουμε

$$I = -\int \frac{\cos x}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \sin x \, dx$$

και θεωρούμε την αντικατάσταση $t = \cos x$.

(ii) Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση του Weierstrass και βρίσκουμε:

$$I_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2\sin x}{\sqrt{5}+1-2\sin x}\right| + c.$$

Διαφορετικά, γράφουμε

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{1 + \sin x - \sin^2 x}\, dx$$

και θεωρούμε την αντικατάσταση $t = \sin x$.
Ποιά από τις δυο περιπτώσεις σας είναι προτιμότερη στην περίπτωση αυτή;