Tempered distributions

και

μετασχηματισμός Fourier

Ιωακείμ Ι. Ιωάννης
yiannis.ioakim.math@gmail.com

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Tempered distributions

1.1 Rapidly Decreasing Functions

Ορισμός 1.1.1. *Το σύνολο*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ ή } \mathbb{R} \ : \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty \right\}.$$

λέγεται ο χώρος του Schwarz.

Το σύνολο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του χώρου $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ των C^∞ φραγμένων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία του χώρου $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουν την ιδιότητα οτι $\lim_{|x|\to\infty} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| = 0$ και δια το λόγο αυτό το σύνολο αυτό λέγεται ο χώρος των γρήγορα φθίνουσων συναρτήσεων (rapidly decreasing functions).

Ορισμός 1.1.2. *Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Για $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε*

$$\|\phi\|_k = \max_{|\alpha|+|\beta|=k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)|.$$

Για $k \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $\| \cdot \|_k : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ είναι καλά ορισμένη αφού για $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε οτι $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)| < \infty$. Επιπλέον, η συνάρτηση αυτή ορίζει νόρμα. Από τη νόρμα αυτή επάγεται η μετρική

$$d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \mathbb{C} \quad \text{με} \quad d(\phi, \psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\|\phi - \psi\|_k}{1 + \|\phi - \psi\|_k},$$

για $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Με τη μετρική αυτή, ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ γίνεται χώρος Frechét. Βέβαια, ένας (ισοδύναμος) τρόπος να ορίσουμε νόρμα στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι ο ακόλουθος

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Για $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ θέτουμε*

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi(x)|.$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιούμε το δεύτερο ορισμό.

Ορίζουμε σύγκλιση στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Ορισμός 1.1.4. *Λέμε οτι μια ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ συγκλίνει στη ϕ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ισχύει $\|\phi_n - \phi\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{n} 0$, δηλ.*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\phi_n(x) - \phi(x))| \to 0.$$

Έτσι, μια ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ συγκλίνει στο 0 στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ ισχύει $\|\phi_n\|_{\alpha,\beta} \xrightarrow{n} 0$, δηλ.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \phi_n(x)| \to 0.$$

Θεώρημα 1.1.1. *Ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πλήρης, δηλ. κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Γίνεται φανερό λοιπόν οτι αν $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε κάθε ∂^α, $(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ συγκλίνει στο 0 γρηγορότερα από το $\frac{1}{|x|^n}$, για όλα τα $n \geq 0$ καθώς το $|x| \to \infty$.

$\boxed{\textbf{Παραδείγματα}}$ **1.1.1.** *Για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x) := x^\alpha e^{-\lambda |x|^2}$, όπου $\lambda \in [0, \infty)$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, για κάθε πολυώνυμο p στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει οτι η απεικόνιση $x \mapsto p(x) e^{-\|x\|^2}$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Το σημείο κλειδί στο κεφάλαιο αυτό είναι η σύνδεση του χώρου των κατα Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (συγκεκριμένα των κλάσεων) με το χώρο των tempered functions. Η σύνδεση αυτή παραπέμπει στα πολυωνυμικά φράγματα που επάγουν οι κατανομές αυτές:

Θεώρημα 1.1.2. *Αν p, q είναι πολυώνυμα, τότε η απεικόνιση*

$$g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad \phi \mapsto g(\phi) := p(x) q(\partial) \phi$$

είναι συνεχής

Απόδειξη. Προφανής, από τον ορισμό των tempered functions. □

Θεώρημα 1.1.3. *Ισχύει οτι*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Μάλιστα, ο $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Διαλέγουμε μια $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\rho = 1$ στην $\mathbb{B}_n(0,1)$ και θέτουμε $\phi_i := \rho\left(\frac{x}{i}\right) \phi(x)$, για $i = 1, 2, \ldots$. Τότε, υπάρχουν σταθερές C_k, $k = 1, 2, \ldots$ τέτοιες ώστε

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} \|\phi - \phi_i\|_{\alpha,\beta} \leq C_k \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq k} \sup_{x\in(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}_n(0,i))} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| \tag{1.1}$$

Αλλά,

$$\sup_{x\in(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{B}_n(0,i))} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| \xrightarrow{i\to\infty} 0,$$

αφού

$$|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| \leq \frac{1}{|x|} \sum_{|\gamma|=|\alpha|+1} \|\phi\|_{\gamma,\beta}.$$

Έτσι προσεγγίσαμε (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$) τη ϕ με μια ακολουθία $(\phi_i)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Το αποτέλεσμα έπεται. □

Πρόταση 1.1.1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $N \in \mathbb{Z}_+$ τέτοιος ώστε $N > \frac{n}{2}$ και $x \mapsto (1+|x|^2)^{-N} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^N}\, dx < M.$$

Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}(1+|x|^2)^N|\phi(x)| &\leq C \sum_{|\alpha|\leq 2N} \|\phi\|_{\alpha,0} \\ \Rightarrow |\phi(x)| &\leq \frac{C}{(1+|x|^2)^N} \sum_{|\alpha|\leq 2N} \|\phi\|_{\alpha,0}\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά C. Έτσι,

$$\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|\, dx \leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq 2N} \|\phi\|_{\alpha,0},$$

όπου $C_1 = MC$. Δηλ. $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

1.2 Tempered distributions

Έχοντας ορίσει τον χώρο των tempered functions θα ορίσουμε γραμμικά συναρτησοειδή πάνω σε αυτόν κατασκευάζοντας έτσι το χώρο των tempered distributions.

Ορισμός 1.2.1. *Συνεχή, γραμμικά συναρτησοειδή στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ λέγονται tempered distributions, δηλ. της μορφής*

$$u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}.$$

Ο χώρος των tempered distributions συμβολίζεται με $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$ και είναι ο δυϊκός του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ο χώρος αυτός είναι σταθερός ως προς τη διαφόριση και πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα. Μια γραμμική μορφή $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής αν υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ και $k, m \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi| = C \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq k} \|\phi\|_{\alpha,\beta}, \tag{1.2}$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 1.2.1. *Μια γραμμική μορφή u στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι ακολουθιακά συνεχής, δηλ. αν $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\phi_n \to 0$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τότε $\langle u, \phi_n\rangle \to 0$.*

Πρόταση 1.2.1. *Ο περιορισμός μιας συνεχούς γραμμικής μορφής στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι μια κατανομή. Μάλιστα, η u καθορίζεται κατα μοναδικό τρόπο από τον περιορισμό αυτό.*

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος έπεται από το ότι $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και το δεύτερο μέρος από το ότι ο $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Ορισμός 1.2.2. *Ο χώρος $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$ είναι ο υπόχωρος του $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))'$ ο οποίος αποτελείται από κατανομές οι οποίες επεκτείνονται σε γραμμικές μορφές στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Ορισμός 1.2.3. *Μια ακολουθία* $(u_n)_n \subset (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$ *λέμε οτι συγκλίνει στην* $u \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))'$ *αν*

$$\langle u_n, \phi \rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \phi \rangle,$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Είδαμε οτι $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Επίσης ειδαμε οτι $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Το πλεονέκτημα με την εισαγωγή των tempered distributions είναι οτι αυτές, όπως ειδαμε, συμπεριφέρονται ομαλά ως προς τη διαφόριση και πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα. Επίσης, οι κατανομές αυτές μας επιτρέπουν στο να ορίσουμε κατανομή για το μετασχηματισμό Fourier. Τώρα, ας δούμε κάποια παραδείγματα τα οποία ενισχύουν την ανάγκη εισαγωγής των κατανομών αυτών:

Παραδείγματα 1.2.1. 1. $L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. *[tempered distribution συνεχούς συνάρτησης πολυωνυμικής αύξησης] Μια συνεχής συνάρτηση* f *λέγεται συνάρτηση πολυωνυμικής αύξησης εαν υπάρχουν σταθερές* $C_1, C_2 \geq 0$ *τέτοιες ώστε*

$$|f(x)| \leq C_1(1+|x|)^{C_2}, \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{C_2} < \infty.$$

Έτσι, η $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Επίσης, λόγω του ότι μπορούμε να εναλλάξουμε ολοκλήρωμα με παραγώγιση όσες φορές θέλουμε, έπεται οτι και τα* $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, *για κάθε* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

3. *Έστω* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Τότε, η απεικόνιση*

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad \phi \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx$$

ορίζει μια tempered distribution. Πράγματι, για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} |T_f(\phi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\,dx \right| &\overset{C-S}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \cdot \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |f(x)|\,dx \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \\ &= \|f\|_{0,0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |f(x)|\,dx \\ &= \|f\|_{0,0} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\prod_{i=1}^n (1+x_i^n) \right] |f(x)| \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)}\,dx \\ &\leq \|f\|_{0,0} \cdot \|f\|_{2n,0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)}\,dx \\ &= \|f\|_{0,0} \cdot \|f\|_{2n,0} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+x_i^2)}\,dx \\ &= \|f\|_{0,0} \cdot \|f\|_{2n,0} \prod_{i=1}^n [\arctan(x_i)]_0^{\pi/2}\,dx \\ &= \|f\|_{0,0} \cdot \|f\|_{2n,0} \pi^n \\ &\leq \pi^n \|f\|^2_{2n,0}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Από τις (1.4) και (1.5) έπεται οτι

$$|T_f(\phi)| \leq \pi^{\frac{n}{2}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{2n,0}.$$

Έτσι, $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

4. *Έστω* g *μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάποιο* $m \in \mathbb{N}$ *το*

$$g(x) \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+x_i^2)^m}$$

να είναι φραγμένο (στον $\mathbb{R}^n$*). Τότε, η απεικόνιση*

$$T_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto T_f(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\phi(x)\, dx$$

ορίζει μια tempered distribution. Πράγματι, θέτοντας $p(x) := \prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)$ *έχουμε οτι υπάρχει μια σταθερά* $M > 0$ *τέτοια ώστε* $\left|\frac{g(x)}{p^m(x)}\right| < M$*. Τότε,*

$$|g(x)\phi(x)| = \frac{1}{p^m(x)} |g(x)| p^m(x) |\phi(x)| < M p^m(x) |\phi(x)|.$$

Αλλά η συνάρτηση $x \mapsto Mp^m(x)\phi(x)$ *ανήκει στον* $L^1(\mathbb{R}^n)$*, συνεπώς από το ΘΚΣ η* $x \mapsto g(x)\phi(x)$ *είναι κατα Lebesgue ολοκληρώσιμη, έτσι η* T_g *είναι καλά ορισμένη. Το αποτέλεσμα έπεται από το προηγούμενο παράδειγμα αφού η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι πολυωνυμικής αύξησης. Αλλά ας δούμε τους υπολογισμούς οι οποίοι θα μας προσδιορίσουν και τα ανάλογα φράγματα:*

$$\begin{aligned}
|T_g(\phi)| &< M \int_{\mathbb{R}^n} p^m(x)|\phi(x)|\, dx \\
&= M \int_{\mathbb{R}^n} p^{m+1}(x)|\phi(x)| \frac{1}{p(x)}\, dx \\
&\leq \|f\|_{2n(m+1),0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{p(x)}\, dx \\
&= \|f\|_{2n(m+1),0} \pi^n.
\end{aligned}$$

Έτσι, $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

5. *[Caychy's Principal Value Integral] Θα δείξουμε οτι η απεικόνιση*

$$pv\left(\frac{1}{x}\right) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto pv\left(\frac{1}{x}\right)(\phi) \equiv \left\langle pv\left(\frac{1}{x}\right), \phi \right\rangle := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx$$

ορίζει μια ορίζει μια tempered distribution. Καταρχήν αυτή είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*, τότε*

$$\int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_0^{\epsilon} \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\, dx.$$

Αλλά, $x \mapsto \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 2\phi'(0)$*. έτσι η συνάρτηση* $x \mapsto \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα* $[0,\infty)$ *και άρα η* $pv\left(\frac{1}{x}\right)$ *είναι καλά ορισμένη. Μένει να δείξουμε οτι αυτή είναι ένα γραμμικό συνεχέσ συναρτησοειδές στον* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$*. Η γραμμικότητα είναι προφανής, οπόταν ελέγχουμε τη συνέχεια: Για* $x > 0$ *σταθεροποιημένο έχουμε*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_{-x}^{x} \phi'(t)\, dt\right| \\
&\leq \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} |\phi'(t)|\, dt \\
&\leq 2 \sup_{t\in[-x,x]} |\phi'(t)|.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|pv\left(\frac{1}{x}\right)(\phi)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\phi(x)-\phi(-x)}{x}\,dx\right| \\
&\leq 2\sup_{t\in[-x,x]}|\phi'(t)| + \int_1^\infty [|\phi(x)|+|\phi(-x)|]\frac{x\,dx}{x^2} \\
&\leq 2\sup_{t\in[-x,x]}|\phi'(t)| + 2\sup_{t\in[-x,x]}|x\phi(t)| + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \\
&= 2\|\phi\|_{0,1} + 2\|\phi\|_{1,0}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω $(\phi_n)_n$ μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων τέτοια ώστε*

1. $\phi_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. *Για κάθε $a > 0$, είναι*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq a} \phi_n(x)\,dx = 0.$$

Τότε, $\phi_n \to \delta$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω η απεικόνιση

$$u_{\phi_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f \mapsto u_{\phi_n}(f) \equiv \langle u_{\phi_n}, f\rangle := \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)f(x)\,dx.$$

Τότε, το προς απόδειξη είναι το $\langle u_{\phi_n}, f\rangle \to \delta(f)$, για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $f \neq 0$, δηλ. οτι

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)f(x)\,dx \longrightarrow f(0).$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε για κάθε $\eta > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)f(x)\,dx - f(0)\right| &\overset{(ii)}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)f(x)\,dx - f(0)\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)(f(x)-f(0))\,dx\right| \\
&\leq \int_{[-\eta,\eta]} \phi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx + \int_\eta^\infty \phi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx.
\end{aligned}$$

Σταθεροποιούμε ένα $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(0)| < \frac{\epsilon}{2}$, για κάθε $x \in [-\eta, \eta]$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{[-\eta,\eta]} \phi_n(x)|f(x)-f(0)|\,dx &\leq \frac{\epsilon}{2}\int_{[-\eta,\eta]} \phi_n(x)\,dx \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\int_{-\infty}^\infty \phi_n(x)\,dx \\
&= \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το (iii) έχουμε οτι υπάρχει $N \equiv N(\epsilon)$ τέτοιο ώστε για $n > N$ έχουμε

$$\int_{|x|\geq\eta} \phi_n(x)\,dx < \frac{\epsilon}{4\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|}.$$

Έτσι, για $n > N$, έχουμε

$$\int_{|x|\geq\eta} \phi_n(x)|f(x) - f(0)|\,dx \leq 2\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| \int_\eta^\infty \phi_n(x)\,dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Άρα, τελικά, γα $n > N$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)f(x)\,dx - f(0)\right| < \epsilon.$$

□

Παρατηρήσεις 1.2.1. *Το πιο πάνω αποτέλεσμα αναφέρεται για τη συγκέντρωση της μάζας γύρω από το σημείο $x = 0$. Αντικαθιστώντας τη συνθήκη (iii) με την*

$$\int_{|x-x_0|\geq a} \phi_n(x)\,dx \to 0,$$

τότε έχουμε οτι $\phi_n \to \delta_{x_0}$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Επίσης, το πιο πάνω ουσιαστικά μας λέει πως αν η μάζα μαζεύεται σε ένα σημείο x_0, τότε η αντίστοιχη κατανομή είναι ουσιαστικά η κατανομή Dirac.

Ακολούθως, θα δούμε μερικές βασικές tempered distributions και σε ποιές κατανομές αυτές συγκλίνουν.

$\boxed{\textbf{Παραδείγματα}}$ **1.2.2.**

1. *Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε*

   $$f_\epsilon(x) := \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}.$$

   Τότε, επάγεται μια κατανομή u_{f_ϵ} ως εξής:

   $$u_{f_\epsilon} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto u_{f_\epsilon}(\phi) \equiv \langle u_{f_\epsilon}, \phi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x)\phi(x)\,dx.$$

   Τότε, $u_{f_\epsilon} \to pv\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. *Έστω $(f_n)_n$ μια ακολουθία κατα Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε να συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f και τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ για κάποια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε την ακολουθία κατανομών*

   $$u_{f_n} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto u_{f_n}(\phi) := \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)\phi(x)\,dx.$$

   Τότε, από το ΘΚΣ έχουμε οτι

   $$\int f_n(x)\phi(x)\,dx \to \int f(x)\phi(x)\,dx$$

   για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Δηλ. η ακολουθία των tempered distributions u_{f_n} συγκλίνει στην u_f ως κατανομές, δηλ.

   $$\langle u_{f_n}, \phi\rangle \longrightarrow \langle u_f, \phi\rangle.$$

3. *Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε*

   $$f_\epsilon(x) := \frac{\epsilon}{(x - x_0)^2 + \epsilon^2}.$$

   Τότε, $f_\epsilon \to \pi\delta_{x_0}$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Πράγματι,

   (α΄) $f_\epsilon \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(β′)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_\epsilon(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon\,dx}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)^2+1} \\
&= \left[\arctan\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \pi.
\end{aligned}$$

(γ′) Για $\alpha > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{|x-x_0|\geq a} f_\epsilon(x)\,dx &= \int_{|x-x_0|\geq a} \frac{\epsilon\,dx}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \\
&= \int_{-\infty}^{-a} \frac{\epsilon\,dx}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} + \int_a^{\infty} \frac{\epsilon\,dx}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \\
&= 2\int_a^{\infty} \frac{\epsilon\,dx}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \\
&= 2\int_a^{\infty} \frac{\epsilon\,dx}{x^2+\epsilon^2} \\
&= 2\left[\arctan\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]_a^{\infty} \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{a}{\epsilon}\right)\right) \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.
\end{aligned}$$

Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα (εφαρμοσμένο στην $\frac{1}{\pi}f_\epsilon$) οτι $f_\epsilon \to \pi\delta_{x_0}$.

4. *Έστω $\epsilon > 0$. Θέτουμε*

$$f_\epsilon(x) := \frac{1}{x-x_0+i\epsilon}.$$

Θα δείξουμε οτι $f_\epsilon \xrightarrow{\epsilon\to 0} pv\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi\delta_{x_0}$, στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_\epsilon(x) &= \frac{1}{x-x_0+i\epsilon} = \frac{x-x_0-i\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \\
&= \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} - \frac{i\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2}.
\end{aligned}$$

Αλλά, από τα προηγούμενα έχουμε οτι $\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \to pv\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ και $-\frac{i\epsilon}{(x-x_0)^2+\epsilon^2} \to -i\pi\delta_{x_0}$.

Είδαμε οτι μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη από ένα πολυώνυμο καθορίζει μια tempered distribution. Προκύπτει οτι τέτοιες συναρτήσεις μαζί με τα διαφορικά τους (κάθε τάξεως) καθορίζουν μια tempered distribution. Έτσι, οι συναρτήσεις αυτές εξαντλούν τον χώρο $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, υπό την έννοια

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχει μια συνεχής πολυωνυμικά φραγμένη συνάρτηση f και $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ τέτοια ώστε $u = \partial^\alpha f$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα το δείξουμε για $n = 1$. Με τον τρόπο αυτό φαίνεται και η κατασκευαστική διαδικασία της αναπαράστασης της κατανομής. Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχουν $C > 0$ και $k, m \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{i\leq m, j\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^i \partial^j \phi| = C \sum_{i\leq m, j\leq k} \|\phi\|_{i,j}, \tag{1.6}$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Από το πιο πάνω φράγμα μπορούμε να πάρουμε εύκολα το εξής: υπάρχει $C' > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{j\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)|, \tag{1.7}$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Αν $f \in \mathbb{D}(\mathbb{R})$, τότε, από το 2ο ΘΘΑΛ έχουμε οτι

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)\, dt$$

και άρα

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{x} |f'(t)|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\, dt = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

και άρα

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{1.8}$$

Αφού η συνάρτηση $x \mapsto (1+x^2)^k \partial^\beta \phi$ ανήκει στον $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, από τις (1.7) και (1.8) έπεται οτι

$$\langle u, \phi\rangle \leq C' \sum_{j\leq m} \|\partial[(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}. \tag{1.9}$$

Αλλά,

$$\partial(1+x^2)^k = k2x(1+x^2)^{k-1} \leq k(1+x^2)^k,$$

έτσι

$$\begin{aligned} |\partial[(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)]| &= \partial^j \phi(x) \partial[(1+x^2)^k] + (1+x^2)^k \partial[\partial^j \phi(x)] \\ &\leq k|(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)| + |(1+x^2)^k \partial^{j+1} \phi(x)|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Επομένως, υπάρχει $C'' > 0$ τέτοιο ώστε

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C'' \sum_{j\leq m+1} \|(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)\|, \tag{1.10}$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \bigoplus_{\ell=1}^{m+1} L^1(\mathbb{R}) \quad \text{με} \quad \phi \mapsto (1+x^2)^k \phi(x) \oplus (1+x^2)^k \partial\phi(x) \oplus \ldots \oplus (1+x^2)^k \partial^{m+1} \phi(x).$$

Η g είναι 1-1: αν $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ με $g(\phi) = g(\psi)$, τότε, από τη μοναδικότητα γραφής του ευθέως αθροίσματος, η γραφή τους θα είναι ίση όρο προς όρο. Συγκεκριμένα, για τον πρώτο όρο των $g(\phi), g(\psi)$ έχουμε οτι $(1+x^2)^k \phi(x) = (1+x^2)^k \psi(x)$, άρα $\phi(x) = \psi(x)$.
Η g είναι γραμμική (προφανές). Η g ουσιαστικά μαζεύει τους παράγοντες $(1+x^2)^k \partial^j \phi(x)$ για $j = 1, 2, \ldots, m+2$. Αυτό θα μας επιτρέψει να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Hahn-Banach. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$G : g(\mathcal{D}(\mathbb{R})) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad g(\phi) \mapsto \langle u, \phi\rangle.$$

Η G είναι καλά ορισμένη (αφού ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τη ϕ) και 1-1. Επίσης, από την (1.10) έχουμε οτι η G είναι ένα γραμμικό φραγμένο συναρτησοειδές στον $g(\mathcal{D}(\mathbb{R}))$ αν αυτός θεωρηθεί ως υπόχωρος του $\left(L^1(\mathbb{R})\right)^{m+2}$. Έτσι, από το Θεώρημα Hahn-Banach έπεται οτι η G μπορεί να επεκταθεί σε ένα γραμμικό φραγμένο συναρτησοειδές σε όλο τον $\left(L^1(\mathbb{R})\right)^{m+2}$. Δηλ. θα έχει τη μορφή

$$G(f_0 \oplus f_1 \oplus \ldots \oplus f_{m+1}) = \sum_{\ell=0}^{m+1} \int_{\mathbb{R}} h_\ell(x) f_\ell(x)\, dx,$$

για κατάλληλες $h_\ell \in L^\infty(\mathbb{R}),\ \ell = 0, 1 \ldots, m+1$. Έτσι,

$$\langle u, \phi \rangle = G(g(\phi)) = \sum_{\ell=0}^{m+1} \int_{\mathbb{R}} h_\ell(x)(1+x^2)^k \partial^\ell \phi(x)\, dx.$$

Έτσι,

$$u = \sum_{\ell=0}^{m+1} (-1)^\ell \partial^\ell [(1+x^2)^k h_\ell(x)], \tag{1.11}$$

ως κατανομές (πάνω στον $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.) Αλλά ο $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και άρα η u έχει τη μορφή (1.11) στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Θέτοντας για κάθε $\ell = 0, 1, \ldots, m+1$

$$H_\ell(x) = \int_0^x (1+t^2)^k h_\ell(x)\, dt$$

έχουμε οτι η κάθε H_ℓ είναι συνεχής και πολυωνυμικά φραγμένη:

$$|H_\ell(x)| = \left| \int_0^x (1+t^2)^k h_\ell(x)\, dt \right| \leq \int_0^x (1+t^2)^k |h_\ell(x)|\, dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |h_\ell(x)| \int_0^x (1+t^2)^k\, dt$$

το οποίο $\sup_{x\in\mathbb{R}} |h_\ell(x)|$ υπάρχει διότι η h_ℓ είναι φραγμένη. Έτσι η H είναι φραγμένη από όρους τάξεως $(1+x^2)^{k+1}$. Επίσης, είναι επιτρεπτή η εναλλαγή ολοκληρώματος και παραγώγισης. Συνεπώς, η (1.11) γίνεται

$$u = \sum_{\ell=0}^{m+1} (-1)^\ell \partial^{\ell+1} H_\ell. \tag{1.12}$$

Ορίζοντας

$$f_\ell(x) = \int_0^x dt_{m+1-\ell} \ldots \int_0^{t_2} h_\ell(t_1)\, dt_1$$

μέσω ολοκλήρωσης της h_ℓ $(m+1-\ell)$-φορές, τότε η f_ℓ είναι συνεχής, πολυωνυμικά φραγμένη και ισχύει

$$\partial^{m+2} f_\ell(x) = \partial^{\ell+1} h_\ell.$$

Συνεπώς,

$$u = \sum_{\ell=0}^{m+1} (-1)^\ell \partial^{m+1} f_\ell.$$

Ορίζοντας

$$F(x) := \sum_{\ell=0}^{m+1} (-1)^\ell f_\ell(x),$$

έχουμε οτι αυτή είναι συνεχής, πολυωνυμικά φραγμένη και

$$u = \partial^{m+2} F.$$

□

1.2.1 Γραμμικοί Μετασχηματισμοί στις Κατανομές

Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ και $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Τότε, επάγεται η κατανομή

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Τότε, αν $c \in \mathbb{R}$, είναι

$$\langle f(cx), \phi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(cx)\phi(x)\,dx, = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(y/c)\,dy.$$

Επειδή το $c > 0$ ή $c < 0$, έχουμε τελικά οτι

$$\langle f(cx), \phi(x) \rangle = \frac{1}{|c|}\langle f(x), \phi(x/c) \rangle.$$

Ουσιαστικά κάναμε μια μετάθεση στην f. Βλέποντας την f δυϊκά ως κατανομή, η μετάθεση αυτή περνά στη συνάρτηση δοκιμής. Υπάρχουν επίσης και διάφοροι άλλοι μετασχηματισμοί στην f, όπως για παράδειγμα η μεγέθυνση: αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $t > 0$, τότε

$$\langle f(t^\lambda x), \phi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t^\lambda x)\phi(x)\,dx = \frac{1}{t^\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(y/t^\lambda)\,dy = t^{-\lambda}\int_{\mathbb{R}} f(y)\phi(y/t^\lambda)\,dy.$$

Θα ορίσουμε το ανάλογο στις κατανομές. Υπενθυμίζουμε οτι έναν γραμμικό μετασχηματισμό μπορούμε να τον δούμε ως έναν αντιστρέψιμο πίνακα. Έστω λοιπόν $A \in GL(n,n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$. Ξέρουμε οτι $\mathbb{R}^{n\times 1} \cong \mathbb{R}^n$ και $M(n,n) \equiv \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\} \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{με} \quad x \mapsto g(x) := Ax.$$

Δηλ. αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$, τότε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_i)_{i=1}^n \mapsto Ax$, με $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j,\ i = 1, 2, \dots, n$. Επίσης, $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Έστω τώρα $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Τότε, θέτουμε

$$A^* f(x) = f(Ax), \text{ για } x \in \mathbb{R}^n.$$

Δηλ. $A^* f = f \circ g$. Η αντίστοιχη κατανομή που επάγει η (συνεχής) συνάρτηση f είναι η

$$\begin{aligned} \langle A^* f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} A^* f(x)\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\phi(x)\,dx \\ &\overset{\Theta.\ (2.0.1)}{=} \frac{1}{|\det(A)|}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(A^{-1}x)\,dx \\ &= \frac{1}{|\det(A)|}\langle f, (A^{-1})^*\phi \rangle, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έπεται φυσιολογικά λοιπόν ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 1.2.4. *Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ και $A \in GL(n,n)$. Τότε, ορίζουμε την κατανομή A^*u ως εξής:*

$$\langle A^* u, \phi \rangle = \frac{1}{|\det(A)|}\langle u, (A^{-1})^*\phi \rangle, \tag{1.14}$$

$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω A και u όπως στον προηγούμενο ορισμό. Τότε:*

1. *Αν $u \in C(\mathbb{R}^n)$, τότε, η A^*u δίνεται από την* (1.13).

2. *Η απεικόνιση*
$$h : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad x \mapsto A^*u$$
είναι ακολουθιακά συνεχής.

3. *Για u σταθεροποιημένο, η απεικόνιση*
$$m : GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad A \mapsto A^*u$$
είναι C^∞.

Απόδειξη. Τα (i) και (ii) έχουν αποδειχθεί πιο πάνω. Για το (iii), αρκεί να δείξουμε οτι (για u σταθεροποιημένο) η απεικόνιση $A \mapsto \langle A^*u, \phi\rangle$ είναι C^∞ για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έστω $U \subset\subset CL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Αν $A \in U$, τότε το σύνολο $\operatorname{supp}((A^{-1})^*\phi) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A^{-1}x \in \operatorname{supp}(\phi)\} = A(\operatorname{supp}(\phi))$ περιέχεται σε ένα συμπαγές σύνολο. Επομένως, από το Θεώρημα, έχουμε το αποτέλεσμα. □

Παρατηρήσεις 1.2.2.

1. Αν $A = tI_{n\times n}$, όπου $t > 0$, τότε $\det(A) = t^n$ και η σχέση (1.14) μας δίνει
$$\langle A^*u, \phi\rangle = \frac{1}{t^\lambda}\langle u(x), \phi(x/t)\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$
Στην περίπτωση αυτή, συμβολίζουμε με u_t την κατανομή A^*u, όπου $A = tI_{n\times n}$.

2. Αν $A = \frac{1}{t}I_{n\times n}$, όπου $t > 0$, τότε $\det(A) = \frac{1}{t^n}$ και η σχέση (1.14) μας δίνει
$$\langle A^*u, \phi\rangle = t^n\langle u(x), \phi(xt)\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

3. Αν $u_t = t^\lambda u$, η σχέση (1.14) μας δίνει
$$\langle u_t, \phi\rangle = t^{n+\lambda}\langle u(x), \phi(xt)\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$
Η περίπτωση αυτή είναι το ανάλογο της $f(xt) := t^\lambda f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$.

4. Θα δούμε τώρα το διαφορικό του γραμμικού μετασχηματισμού κατανομής. Συγκεκριμένα, αν $f \in C(\mathbb{R}^n)$, τότε
$$\partial_i(A^*f) = A^*\left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}\partial_j f\right),$$
για $i = 1, 2, \ldots, n$. Πράγματι, αν $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, τότε,
$$\begin{aligned}
\langle \partial_i(A^*f), \phi\rangle &= -\langle A^*f, \partial_j\phi\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\partial_i\phi(x)\,dx \overset{\text{κατά μέρη}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i(f(Ax))\phi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}\partial_i f(Ax)\right)dx \\
&= \left\langle A^*\left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}\partial_j f\right), \phi\right\rangle.
\end{aligned}$$
Από τη σχέση (1.14) μπορούμε να γενικεύσουμε το πιο πάνω στις κατανομές:
Αν $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, τότε,
$$\partial_i(A^*u) = A^*\left(\sum_{j=1}^n a_{j,i}\partial_j u\right),$$
για $i = 1, 2, \ldots, n$.

1.3 Tempered distributions και μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 1.3.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με*

$$\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\lambda\cdot x} f(x)\, dx, \tag{1.15}$$

όπου $\lambda \cdot x = \langle \lambda, x\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, αν $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ και $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση $\widehat{G} \equiv \mathcal{G}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ με

$$x \mapsto \widehat{G}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\lambda\cdot x} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.16}$$

Μπορούμε να ορίσουμε ως $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ το:

$$\lambda \mapsto \widehat{f}(\lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\lambda\cdot x} f(x)\, dx \tag{1.17}$$

και για $\widehat{G} \equiv \mathcal{G}(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ το

$$x \mapsto \widehat{G}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\lambda\cdot x} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{1.18}$$

Υπενθυμίζουμε οτι τα στοιχεία εμβαδού στους πιο πάνω ορισμούς είναι τα

$$dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dm(x) \quad \text{και} \quad d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dm(\lambda),$$

όπου m το μέτρο Lebesque στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις 1.3.1.

1. *Για να είναι ο ορισμός (1.17), καλός, θα πρέπει το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος να υπάρχει. Αυτό υπάρχει αν η $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*
   Πράγματι,
   $$\begin{aligned} |\widehat{f}(\lambda)| &= \left| \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\lambda\cdot x} f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i\lambda\cdot x}| \cdot |f(x)|\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} < \infty. \end{aligned}$$
   Δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι φραγμένος από την L^1 νόρμα (της f).
2. *Η $\widehat{f}$ είναι συνεχής συνάρτηση (από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης).*
3. *Για να έχει νόημα ο ορισμός που δώσαμε για τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Fourier $\widehat{G}$ της f, θα πρέπει όντως $\widehat{G} = \mathcal{F}^{-1}$, δηλ. για κάθε f να ισχύει $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = f = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f))$. Αυτό πράγματι ισχύει όπως θα δουμε στο Θεώρημα (1.3.2).*

Ακολούθως θα δούμε ορισμένες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 1.3.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση. Τότε,*

$$\widehat{(f \circ T)}(\lambda) = \frac{1}{|\det T|} \widehat{f}((T^{-1})^*(\lambda))$$

και

$$\widehat{(f \circ T)}^{-1}(x) = \frac{1}{|\det T|} \widehat{f}^{-1}((T^{-1})^*(x)).$$

Απόδειξη. Έχουμε για $\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{(f \circ T)}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \lambda \cdot x} (f \circ T)(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \lambda \cdot x} (f(T(x))\, dx.$$

Θέτοντας $T(x) = y$, έχουμε οτι $|\det(T)| dx = dy$ και άρα η πιο πάνω γίνεται

$$\widehat{(f \circ T)}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \lambda \cdot T^{-1}(y)} \frac{f(y)}{|\det(T)|}\, dy = \frac{1}{|\det T|} \widehat{f}((T^{-1})^*(\lambda)).$$

Ομοίως και για τον $\widehat{(f \circ T)}^{-1}$. □

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x \mapsto f(x)\widehat{g}(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot |\widehat{g}(x)|\, dx \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda} g(\lambda)\, d\lambda \right\} dx \\ &\overset{Fubini}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\, d\lambda \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda} f(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda} f(x) \right\} d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\lambda) g(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned}$$

□

Το αποτέλεσμα της Πρότασης (1.1.1) γράφεται και ως

$$\langle \widehat{f}, g \rangle = \langle f, \widehat{g} \rangle$$

το οποίο θα γενικεύσουμε παρακάτω στις κατανομές. Επίσης, η Πρόταση αυτή μας επιτρέπει να θεωρούμε συναρτήσεις $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ στο μετασχηματισμό Fourier. Γιαυτό στα παρακάτω θεωρούμε τέτοιες f.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\widehat{f}$ ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε, $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ είναι*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \lambda_j}(\lambda) = (-\widehat{ix_j f(x)})(\lambda), \quad \text{δηλ.} \quad -\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \lambda_j}(\lambda) = (\widehat{ix_j f(x)})(\lambda)$$

και

$$i\lambda_j \widehat{f}(\lambda) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial \lambda_j}},$$

για $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Γενικότερα, για $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ έχουμε

$$(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{f}(\lambda) = \widehat{(ix^\alpha f)}(\lambda) \tag{1.19}$$

και

$$(\widehat{\partial^\alpha f})(\lambda) = (i\lambda)^\alpha \widehat{f}(\lambda). \tag{1.20}$$

Απόδειξη. $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \mathbb{R}^n$. Θα δείξουμε οτι

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} ix_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx,\ \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

δηλ. οτι μπορούμε να εναλλάξουμε ολοκλήρωση με παραγώγιση. Έχουμε για $h \neq 0$ και $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\widehat{f}(\lambda + he_j) - \widehat{f}(\lambda)}{h} - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} ix_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx\right| \\
=& \left|\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-i(\lambda+he_j)\cdot x} - e^{-i\lambda\cdot x}\right) f(x)\,dx - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} ix_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx\right| \\
=& \left|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{e^{-i(\lambda+he_j)\cdot x} - e^{-i\lambda\cdot x}}{h} - ix_j e^{-i\lambda\cdot x}\right) f(x)\,dx\right| \\
\leq& \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{h}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)| \xrightarrow{h\to 0} 0,
\end{aligned}$$

αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Δείξαμε λοιπόν οτι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(\lambda + he_j) - \widehat{f}(\lambda)}{h} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} ix_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx,$$

δηλ.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\widehat{f}}{\partial\lambda_j}(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} ix_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial\lambda_j}(e^{-i\lambda\cdot x}) f(x)\,dx \\
&= (\widehat{-ix_j)f}(x)(\lambda).
\end{aligned}$$

Αφού οι συναρτήσεις $x \mapsto x_j f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ έπεται οτι η τελευταία σχέση μπορεί να παραγωγισθεί και να πάρουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda_j^2}\widehat{f}(\lambda) = ((\widehat{-ix_j)^2 f}(x))(\lambda).$$

Συνεχίζοντας έτσι, παρατηρούμε οτι η παραγώγιση δύναται να γίνει για κάθε $k \in \mathbb{Z}_+$ και άρα η f είναι τάξεως C^∞. Έτσι, η εναλλαγή ολοκληρώματος και παραγώγισης (οιασδήποτε τάξεως) μπορεί να γίνει, δηλ.

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda_j^k}\widehat{f}(\lambda) = ((\widehat{-ix_j)^k f}(x))(\lambda).$$

Τώρα,

$$i\lambda_j\widehat{f}(\lambda) = \frac{i\lambda_j}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} i\lambda_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx. \tag{1.21}$$

Αλλά, $i\lambda_j e^{-i\lambda\cdot x} f(x) = -f(x)\frac{\partial(e^{-i\lambda\cdot x})}{\partial x_j}$ και άρα

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} i\lambda_j e^{-i\lambda\cdot x_j}\,dx &\overset{\text{κατά μέρη}}{=} -(e^{-i\lambda\cdot x} f(x))\Big|_{\mathbb{R}^n\cap\operatorname{supp}(f)} + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Έτσι, η (1.21) γίνεται

$$i\lambda_j\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\lambda).$$

Ομοίως, για $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ παίρνουμε

$$i\lambda^\alpha \widehat{f}(\lambda) = \widehat{(\partial^\alpha f)}(\lambda)$$

δηλ.

$$i\lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\dots\lambda_n^{\alpha_n}\widehat{f}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \left(\widehat{\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}}\right)(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

και

$$(\widehat{-ix)^\alpha f}(x)(\lambda) = (\partial^\alpha \widehat{f}(\lambda),$$

δηλ.

$$\widehat{(-ix)^\alpha} f(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}}\right)\widehat{f}(\lambda_1,\dots,\lambda_n).$$

□

Παρατηρήσεις 1.3.2. *Οι δύο πιο πάνω τύποι μπορούν να συμπτυχθούν σε έναν, ητοι*

$$(i\lambda)^\alpha(\partial^\beta\widehat{f})(\lambda) = (\partial^\alpha((\widehat{-ix)^\beta} f(x)))(\lambda) \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+).$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(\partial^\beta\widehat{f})(\lambda) &= \partial^\beta\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}f(x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\partial_\lambda^\beta\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}f(x)\,dx\\
&\overset{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\lambda^\beta(e^{i\lambda\cdot x}f(x))\,dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\lambda^\beta(e^{-i\lambda\cdot x})f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}(-i\lambda)^\beta(e^{-i\lambda\cdot x}f(x))\,dx\\
&= ((\widehat{-i\lambda^\beta))}f(x)(\lambda).
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha(\partial^\beta\widehat{f})(\lambda) &= \lambda^\alpha((\widehat{-ix)^\beta f}(x))(\lambda)\\
&= \frac{\lambda^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}(-ix)^\beta f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{(-i)^\alpha}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}(-ix)^\alpha e^{-i\lambda\cdot x}(-ix)^\beta f(x)\,dx\\
&= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{i^\alpha(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^\alpha(e^{-i\lambda\cdot x})(-ix)^\beta f(x)\,dx\\
&\overset{\kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\varepsilon}\rho\eta}{=} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{i^\alpha(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left\{\left[e^{-i\lambda\cdot x}(-ix)^\beta f(x)\right]\Big|_{\mathbb{R}^n\cap\operatorname{supp}(f)} - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\partial_x^\alpha[(-ix)^\beta f(x)]\,dx\right\}\\
&= \frac{(-1)^{2|\alpha|}}{i^\alpha(2\pi)^{\frac{n}{2}}} - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\partial_x^\alpha[(-ix)^\beta f(x)]\,dx\\
&= \frac{(-i)^{|\alpha|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\partial_x^\alpha[(-ix)^\beta f(x)]\,dx\\
&= (-i)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha(\widehat{-ix)^\beta} f(x)(\lambda).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$(i\lambda)^\alpha(\partial^\beta\widehat{f})(\lambda) = (\partial^\alpha((\widehat{-ix)^\beta} f(x)))(\lambda).$$

Εφαρμογή Έστω
$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}.$$
Τότε, ο μετασχηματισμός Fourier της ϕ,
$$\widehat{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \widehat{\phi}(\lambda) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\lambda} e^{-\frac{1}{2}|x|^2}\, dx$$
είναι ο
$$e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}.$$
Δηλ.
$$\widehat{\phi}(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}.$$
Θα το δείξουμε για $n = 1$ αφού τότε το γενικότερο έπεται εύκολα. Για $n = 1$ η $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Η ϕ ικανοποιεί τη Διαφορική Εξίσωση
$$\partial\phi + x\phi = 0, \tag{1.22}$$
όπως εύκολα μπορούμε να δούμε. Έτσι, $\widehat{\partial\phi} + \widehat{x\phi} = 0$. Αλλά, από τις σχέσεις (1.19) και (1.20) έχουμε οτι $\widehat{\partial\phi} = \lambda\widehat{\phi}(\lambda)$ και $\widehat{x\phi} = \partial\widehat{\phi}(\lambda)$. Έτσι, η (1.22) γίνεται
$$\partial\widehat{\phi} + \lambda\widehat{\phi}(\lambda) = 0.$$
Συνεπώς, $\widehat{\phi}(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, όπου C σταθερά. Η C προσδιορίζεται από την τιμή της $\widehat{\phi}$ στο $\lambda = 0$:
$$C = \widehat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\cdot 0} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$$
Έτσι,
$$\widehat{\phi}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}. \tag{1.23}$$
Τέλος, για $n > 2$, έχουμε
$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(\lambda) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda} \phi(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n \left(-2\pi i x_i\lambda_i - \frac{1}{2}x_i^2\right)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-2\pi i x_i\lambda_i - \frac{1}{2}x_i^2}\, dx_1 \dots dx_n \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_i\lambda_i - \frac{1}{2}x_i^2}\, dx_i = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x_i\lambda_i} e^{-\frac{1}{2}x_i^2}\, dx_i \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \widehat{\widetilde{\phi}}(\lambda_i) \overset{(1.23)}{=} \prod_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda_i^2}{2}} = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}},
\end{aligned}$$
όπου $\widetilde{\phi}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. ■

Θεώρημα 1.3.2. *Για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(f))$, όπου G η συνάρτηση που δίνεται από την* (1.18). *Επομένως, η G είναι (πράγματι) ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.*

Απόδειξη. Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}\,d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)\left\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\lambda\cdot x}\,dx\right\}d\lambda \\
&\overset{()}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)e^{-i\lambda\cdot(x-y)}\,d\lambda\right\}f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x-y)f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)f(x+y)\,dx. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Θέτοντας $y = 0$ στην (1.24), έχουμε $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\widehat{f}(x)\,dx$, η οποία σχέση έχει ήδη αποδειχθεί και στην Πρόταση (1.3.2). Θεωρούμε τώρα για κάθε $\epsilon > 0$ τη συνάρτηση $\lambda \mapsto g_\epsilon(\lambda) := g(\epsilon\lambda)$. Τότε,

$$\widehat{g}_\epsilon(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda}g(\epsilon\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\epsilon^n(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\frac{u}{\epsilon}}g(u)\,du = \frac{1}{\epsilon^n}\widehat{g}\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \qquad (1.25)$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} g_\epsilon(\lambda)\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}\,dy &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\epsilon\lambda)\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}\,dy \overset{(1.24)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}_\epsilon(x)f(x+y)\,dx \\
&\overset{(1.25)}{=} \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)f(x+y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)f(y+\epsilon x)\,dx.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\int_{\mathbb{R}^n} g_\epsilon(\lambda)\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)f(y+\epsilon x)\,dx$ και λαμβάνοντας $\epsilon \to 0$, έχουμε οτι

$$g(0)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda\cdot y}\,dy = f(y)\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(x)\,dx. \qquad (1.26)$$

Για τη συνάρτηση $x \mapsto g(x) := e^{-x^2/2}$ έχουμε οτι $g(0) = 1$, $\widehat{g}(u) = e^{-u^2/2}$ και $\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{g}(u)\,du = (2\pi)^{n/2}$. Επομενως, η (1.26) μας δίνει

$$(\mathcal{G}\widehat{f})(y) = f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

και άρα

$$(\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))) = f.$$

Ομοίως,

$$(\mathcal{F}(\mathcal{G}(f)))(y) = f(y),$$

δηλ. $\mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}$. □

Θεώρημα 1.3.3. *$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Θα δείξουμε οτι $\|\widehat{f}\|_{\alpha,\beta} < \infty$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
|((\lambda^\beta\partial^\alpha)\widehat{f})(\lambda)| &= \left|\frac{(-i)^\beta}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))|\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

και αφού $\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x)) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, έπεται από την (1.3.3) οτι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |((\lambda^\beta\partial^\alpha)\widehat{f})(\lambda)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x)))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \tag{1.28}$$

Ομοίως και για τον $\mathcal{F}^{-1}$, αφού $(\mathcal{F}^{-1}(f))(x) = (\mathcal{F}(f))(-x)$. □

Παρατηρήσεις 1.3.3. *Από τα δύο πιο πάνω Θεωρήματα προκύπτει οτι αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, τότε,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\lambda)e^{2\pi i x\cdot\lambda}\, d\lambda.$$

Δηλ. έχουμε την αναπαράσταση της f μέσω του μετασχηματισμού Fourier της [Θεώρημα αντιστροφής του Fourier]. Θα βρούμε τον αντίστοιχο τύπο για τον αντίστροφο μετασχηματισμό: Η πιο πάνω σχέση γράφεται

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-\lambda)e^{-2\pi i x\cdot\lambda}\, d\lambda := \widehat{\psi}(x),$$

όπου $\psi(\lambda) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}(-\lambda)$ (η οποία ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) και άρα

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}f(-x) := (2\pi)^{\frac{n}{2}}\check{f}(x). \tag{1.29}$$

Θεώρημα 1.3.4. *Η απεικόνιση $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής, δηλ. για κάθε ακολουθία $(f_n)_n$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $f_n \to f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ θα είναι και $\widehat{f}_n \to \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Έστω ακολουθία $(f_n)_n$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $f_n \to f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, από την (1.28) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\|\partial^\beta(x^\alpha f(x))\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}|\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))|\,dx \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i^2}{\prod_{i=1}^n(1+x_i^2)}|\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\prod_{i=1}^n x_i^2\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))\right|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n(1+x_i^2)}\,dx \\
&\overset{(f)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\prod_{i=1}^n x_i^2\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))\right|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\prod_{i=1}^n x_i^2\partial^\beta(((-ix)^\alpha)f(x))\right|\frac{\pi^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}. \\
&\leq C\|f\|_{|\alpha|+2n,|\beta|},
\end{aligned}$$

από το Θεώρημα του Leibniz για κάποια σταθερά $C > 0$. □

Θεώρημα 1.3.5. *Η απεικόνιση $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. 1-1: Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ με $\mathcal{F}(f) \equiv \widehat{f} = 0$. Τότε, αφού

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\lambda)e^{2\pi i x\cdot\lambda}\,d\lambda,$$

έπεται οτι $f = 0$. Συνεπώς, $\mathcal{F}$ 1-1.

Τέλος, η απεικόνιση είναι επί, από τις παρατηρήσεις μετά το Θεώρημα (1.3.3). □

Ορισμός 1.3.2. *Ο μετασχηματισμός Fourier μιας $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ είναι η κατανομή $\widehat{u} \equiv \mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ η οποία δίνεται από τον τύπο*

$$\phi \mapsto \widehat{u}(\phi) \equiv \langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle.$$

Παρατηρήσεις 1.3.4. *Οδηγηθήκαμε στον ορισμό αυτό εντελώς αναλογικά με την περίπτωση που η κατανομή είναι μια συνάρτηση στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, αν $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier της,*

$$\lambda \mapsto \widehat{u}(\lambda)$$

είναι μια φραγμένη και συνεχής απεικόνιση αφού όπως είδαμε

$$|\widehat{u}(\lambda)| \leq \frac{\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}.$$

Έτσι, η $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Θα προσδιορίσουμε τον τύπο της. Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, όπως είδαμε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\lambda)\phi(\lambda)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\widehat{\phi}(x)\, dx,$$

δηλ.

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle.$$

Αφού η απεικόνιση

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad \phi \mapsto \widehat{\phi}$$

είναι συνεχής, τότε δυϊκά έχουμε οτι αν $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, η απεικόνιση

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C} \quad \text{με} \quad \phi \mapsto \langle u, \widehat{\phi} \rangle$$

είναι μια tempered κατανομή και ο πιο πάνω ορισμός έχει νόημα.

$\boxed{\textbf{Παραδείγματα}}$ **1.3.1.**

1. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Θα υπολογίσουμε την $\widehat{\delta_{x_0}}$. Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta_{x_0}}, \phi \rangle &= \langle \delta_{x_0}, \widehat{\phi} \rangle \\ &= \widehat{\phi}(x_0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_0 \cdot y} \phi(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-ix_0 \cdot y}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \phi(y)\, dy \end{aligned}$$

   και άρα $\widehat{\delta_{x_0}} = u_g$, όπου u_g είναι η κατανομή που επάγεται από τη συνάρτηση $g(y) = \frac{e^{-ix_0 \cdot y}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$. Αν $x_0 = 0$, τότε $\widehat{\delta_{x_0}} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$.

2. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Θα υπολογίσουμε την $\widehat{\delta'_{x_0}}$. Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\delta'_{x_0}}, \phi \rangle &= \langle \delta'_{x_0}, \widehat{\phi} \rangle \\ &= \langle \delta_{x_0}, -\widehat{\phi}' \rangle \\ &= -\widehat{\phi}'(x_0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} iye^{-ix_0 \cdot y} \phi(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{iye^{-ix_0 \cdot y}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \phi(y)\, dy \end{aligned}$$

   και άρα $\widehat{\delta_{x_0}} = u_g$, όπου u_g είναι η κατανομή που επάγεται από τη συνάρτηση $g(y) = \frac{iye^{-ix_0 \cdot y}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$.

3. *Έστω $x_0 = 0$. Από τη σχέση (1.29) έχουμε οτι $\widehat{\widehat{\delta}}(x) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\check{\delta}(x)$. Όμως, $\check{\delta} = \delta$. Έτσι,*

$$\widehat{\widehat{\delta}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta \tag{1.30}$$

Επίσης, από το (i) έχουμε οτι $\widehat{\delta} = u_1$, όπου u_1 είναι η κατανομή που επάγεται από τη συνάρτηση $1(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$. Έτσι, $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\delta \overset{(1.30)}{=} \widehat{\widehat{\delta}} = \widehat{u_1}$ και άρα

$$\delta = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\widehat{u_1} = \widehat{1}. \tag{1.31}$$

Θεώρημα 1.3.6. *Οι τελεστές $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχείς ισομορφισμοί.*

Απόδειξη. Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Έστω μια ακολουθία $(u_n)_n$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $u_n \to u$ (στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Τότε, για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$. Άρα,

$$\langle \mathcal{F}(u_n), \phi\rangle = \langle u_n, \mathcal{F}(\phi)\rangle \to \langle u, \mathcal{F}(\phi)\rangle = \langle \mathcal{F}(u), \phi\rangle$$

και το συμπέρασμα έπεται. Το ίδιο και για τον $\mathcal{F}^{-1}$. Ο ισομορφισμός έπεται από τον εξής (δυϊκό) αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier: για $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ έχουμε (για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$$\langle \widehat{\widehat{u}}, \phi\rangle = \langle \widehat{u}, \widehat{\phi}\rangle = \langle u, \widehat{\widehat{\phi}}\rangle \overset{(1.29)}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle u, \check{\phi}\rangle.$$

Έτσι,

$$\langle u, \check{\phi}\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\langle \widehat{u}, \widehat{\phi}\rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

□

Από το Θεώρημα (1.3.1) έπονται δυϊκά οι πιο κάτω σχέσεις:

Θεώρημα 1.3.7. *Για κάθε $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$, ισχύει*

$$(ix)^\alpha \widehat{u} = \widehat{\partial^\alpha u} \tag{1.32}$$

και

$$\partial^\beta \widehat{u} = (\widehat{(-ix)^\beta u}). \tag{1.33}$$

Γενικά, ισχύει

$$(ix)^\alpha \partial^\beta \widehat{u} = [\partial^\alpha(\widehat{(-ix)^\beta u})].$$

Επίσης, για $h \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$(\widehat{\tau_h u})(\lambda) = \widehat{u}(\lambda)e^{-2\pi i x\cdot h} \tag{1.34}$$

και

$$\tau_h(\widehat{u})(\lambda) = u(\widehat{x)e^{-2\pi i x\cdot h}}. \tag{1.35}$$

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\langle (ix)^\alpha \widehat{u}, \phi\rangle &= \langle \widehat{u}, (ix)^\alpha \phi\rangle = \langle u, \widehat{(ix)^\alpha \phi}\rangle \\ &\overset{(1.19)}{=} \langle u, (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha \widehat{\phi}\rangle = \langle \partial^\alpha u, \widehat{\phi}\rangle = \langle \widehat{\partial^\alpha u}, \phi\rangle\end{aligned}$$

και άρα

$$(ix)^\alpha \widehat{u} = \widehat{\partial^\alpha u}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\beta \widehat{u}, \phi \rangle &= (-i)^{|\beta|} \langle \widehat{u}, \partial^\beta \phi \rangle = \langle \widehat{u}, (-i)^{|\beta|} \partial^\beta \phi \rangle \\
&= \langle u, (\widehat{(-i)^{|\beta|} \partial^\beta}) \phi \rangle \overset{(1.20)}{=} \langle u, (-ix)^\beta \widehat{\phi} \rangle \\
&= \langle (-ix)^\beta u, \widehat{\phi} \rangle = \langle (\widehat{-ix)^\beta} u, \phi \rangle
\end{aligned}$$

και άρα

$$\partial^\beta \widehat{u} = ((\widehat{-ix)^\beta} u).$$

Τώρα,

$$\langle \widehat{(\tau_h u)}, \phi \rangle = \langle \tau_h u, \widehat{\phi} \rangle = \langle u, \tau_{-h} \widehat{\phi} \rangle.$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}
\tau_{-h} \widehat{\phi}(\lambda) &= \widehat{\phi}(\lambda + h) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot (\lambda + h)} \phi(x) \, d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \lambda} e^{-2\pi i x \cdot h} \phi(x) \, d\lambda \\
&= (\widehat{\phi e^{-2\pi i x \cdot h}}).
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\langle \widehat{(\tau_h u)}, \phi \rangle = \langle u, (\widehat{\phi e^{-ix \cdot h}}) \rangle = \langle \widehat{u}(\lambda), \phi(\lambda) e^{-2\pi i \lambda \cdot h} \rangle = \langle \widehat{u}(\lambda) e^{-i\lambda \cdot h}, \phi(\lambda) \rangle$$

και άρα

$$\widehat{(\tau_h u)}(\lambda) = \widehat{u}(\lambda) e^{-2\pi i \lambda \cdot h}.$$

Τέλος,

$$\langle u(\widehat{x) e^{-2\pi}} i x \cdot h, \phi \rangle = \langle u(x) e^{-2\pi i x \cdot h}, \widehat{\phi} \rangle = \langle u(x), e^{-2\pi i x \cdot h} \widehat{\phi} \rangle.$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}
e^{-2\pi i x \cdot h} \widehat{\phi}(\lambda) &= e^{-2 i x \cdot h} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \phi(x) \, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot h} e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \phi(x) \, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot (\lambda + h)} \phi(x) \, dx \\
&= \widehat{\phi}(\lambda + h) = \tau_{-\widehat{h(\phi(\lambda}})).
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\langle u(\widehat{x) e^{2\pi i}} x \cdot h, \phi \rangle = \langle u(x), \tau_{-\widehat{h(\phi(\lambda}})) \rangle = \langle \widehat{u}(\lambda), \tau_{-h}(\phi(x)) \rangle = \langle \tau_h(\widehat{u}), \phi \rangle.$$

Άρα

$$u(\widehat{x) e^{2\pi i}} x \cdot h = \tau_h(\widehat{u}).$$

□

Εφαρμογή Στα παραδείγματα 1.3.1 υπολογίσαμε τον τύπο του μετασχηματισμού Fourier της κατανομής Dirac καθώς και της πρώτης παραγώγου της. Ο μετασχηματισμός για μεγαλύτερης τάξης παραγώγου (χωρίς απώλεια της γενικότητας, υποθέτουμε οτι $x_0 = 0$) δίνεται από την 1.32 :

$$\widehat{\partial^\alpha \delta} = (ix)^\alpha \widehat{\delta}.$$

Αλλά, $\widehat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ και η τελευταία σχέση γίνεται

$$(ix)^\alpha = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\partial^\alpha \delta}.$$

Επίσης, η 1.33 δίνει $(\widehat{(-ix)^\alpha \delta}) = \partial^\alpha \widehat{\delta}$, δηλ.

$$(\widehat{(ix)^\alpha \delta}) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{\delta},$$

Λαμβάνοντας όμως υπόψιν την (1.31), η πιο πάνω γίνεται τελικά

$$(\widehat{(ix)^\alpha}) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{\delta},$$

Τέλος, οι (1.34) και (1.35) σε συνδυασμό με την (1.31), δίνουν

$$(\widehat{\tau_h \delta}) = e^{-2\pi i x \cdot h}$$

και

$$\tau_h(\widehat{\delta}) = \widehat{e^{-2\pi i x \cdot h}}$$

αντίστοιχα.

1.4 Συνέλιξη

'μεσα συνδεδεμένη με τη Θεμελιώδη λύση ορισμένων διαφορικών τελεστών είναι και η έννοια της συνέλιξης, την οποία θα μελετήσουμε παρακάτω πρώτα στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και ακολούθως στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Αφετηρία είναι παραστάσεις της μορφής:

$$x \mapsto f * g = \int f(y) g(x-y)\, dy = \int f(x-y) g(y)\, dy. \tag{1.36}$$

Συνθήκες για την ύπαρξη του πιο πάνω ολοκληρώματος πρέπει να μπούν. Για παράδειγμα, αν μια από τις f, g είναι συνεχής και η άλλη έχει συμπαγή φορέα, τότε η $f * g$ υπάρχει και είναι μια συνεχής συνάρτηση. Έτσι, ορίζεται μια κατανομή $u_{f,g} \equiv f * g$ ως εξής:

$$u_{f,g} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad u_{f,g}(\phi) \equiv \langle f * g, \phi \rangle := \int f(x) g(y) \phi(x+y)\, dx\, dy, \tag{1.37}$$

για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θα γενικεύσουμε το πιο πάνω στις κατανομές. Από την πιο πάνω παράσταση (λόγω του διπλού ολοκληρώματος) για να οριστεί καλά το αντίστοιχο αντικείμενο στις κατανομές, θα χρειαστούμε ειδικές συνθήκες για το φορέα της κατανομής. Ένα χρήσιμο εργαλείο το οποίο μας δίνει έναν εύχρηστο τρόπο χειρισμού των φορέων κατανομών στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ είναι το **τανυστικό γινόμενο**:
Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ και $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Αν $f \in C(X)$ και $g \in C(Y)$, τότε θέτουμε

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x) g(y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Ουσιαστικά αυτό είναι το γινόμενο των f και g το οποίο είναι συνεχής συνάρτηση στον $C(X \times Y)$. Ορίζεται η κατανομή $f \otimes g$ στον $\mathcal{D}'(X \times Y)$ ως εξής:

$$f \otimes g : \mathcal{D}'(X \times Y) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \phi \mapsto \langle f \otimes g, \phi \rangle = \int f(x) g(y) \phi(x, y)\, dx\, dy.$$

Ειδικότερα, για $\phi \otimes \psi$, (δηλ. $\phi \in C_c^\infty(X)$ και $\psi \in C_c^\infty(Y)$), δηλ.

$$(\phi \otimes \psi)(x, y) = \int \phi(x) \psi(y)\, dx\, dy, \tag{1.38}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\langle f\otimes g,\phi\otimes\psi\rangle &= \int f(x)g(y)(\phi\otimes\psi)(x,y)\,dx\,dy \overset{Fubini}{=} \left(\int f(x)\phi(x)\,dx\right)\cdot\left(\int g(y)\psi(y)\,dy\right)\\ &= \langle f,\phi\rangle\cdot\langle g,\psi\rangle.\end{aligned}$$

Αρκετά παραδείγματα και εφαρμογές χρησιμοποιούν την κατανομή που ορίζεται ως ολοκλήρωμα, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός Fourier που θα μελετήσουμε παρακάτω. Η διάσπαση του γινομένου αυτού στις κατανομές απαιτεί περισσότερη δουλειά, την οποία θα δούμε αμέσως.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστωσαν $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά. Έστω $u\in\mathcal{D}'(X)$ και $\phi\in C^\infty(X\times Y)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω υπόθεση:*

κάθε $y\in Y$ έχει μια περιοχή $U(y)\subset Y$ τέτοια ώστε ο φορέας της συνάρτησης $x\mapsto\phi(x,z)$ να περιέχεται σε ένα συμπαγές σύνολο $K\equiv K(y)$, για $z\in U(y)$.

Τότε, η συνάρτηση $y\mapsto\langle u(x),\phi(x,y)\rangle$ ανήκει στον $C^\infty(Y)$. Επιπλέον, για κάθε $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$, έχουμε

$$\partial^\alpha\langle u(x),\phi(x,y)\rangle = \langle u(x),\partial_y^\alpha\phi(x,y)\rangle. \tag{1.39}$$

Το πιο πάνω μας λέει ότι η παραγώγιση της κατανομής αντανακλάται στην παραγώγιση της συνάρτησης δοκιμής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Απόδειξη. Για διευκόλυνση των υπολογισμών, θέτουμε $g(y):=\langle u(x),\phi(x,y)\rangle,\ (y\in Y)$. Θα δείξουμε πρώτα οτι η $g\in C(X)$. Έστω $z\in Y$. Θα δείξουμε οτι το όριο $\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο ώστε $y\in U(z)$ για $|y-z|<\delta$. Για $h\in\mathbb{R}^n$ με $|h|<\delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} g(z+h)-g(z) &= \langle u(x),\phi(x,z+h)\rangle - \langle u(x),\phi(x,z)\rangle\\ &= \langle u(x),\phi(x,z+h)-\phi(z,h)\rangle\\ &\equiv \langle u(x),\phi_h(x,z)\rangle.\end{aligned}$$

Αλλά, από την υπόθεση, ο φορέας της συνάρτησης $\phi_h(\cdot,z)$ περιέχεται στο $K(z)$. Έστω $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, έχουμε οτι

$$\lim_{h\to 0}\partial_x^\alpha\phi_h(x,z)=0$$

και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Έτσι,

$$\lim_{h\to 0}\phi_h(\cdot,z)=\lim_{h\to 0}[\phi(\cdot,z+h)-\phi(\cdot,z)]=0$$

στον $C_c^\infty(X)$. Άρα,

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=0.$$

Τώρα, θα δείξουμε οτι $g\in C^\infty(Y)$. Για $\epsilon\in(0,\delta)$ θεωρούμε την ποσότητα

$$\chi_\epsilon(x,z):=\frac{\phi(x,z+\epsilon e_j)-\phi(x,z)}{\epsilon}-\frac{\partial}{\partial y_j}\phi(x,z).$$

Λαμβάνοντας 'εσωτερικό γινόμενο' με τη u στην πιο πάνω σχέση έχουμε οτι

$$\begin{aligned}\langle u(x),\chi_\epsilon(x,z)\rangle &= \frac{1}{\epsilon}\langle u(x),\phi(x,z+\epsilon e_j)-\phi(x,z)\rangle - \left\langle u(x),\frac{\partial}{\partial y_j}\phi(x,z)\right\rangle\\ &= \frac{1}{\epsilon}[g(z+\epsilon e_j)-g(z)] - \left\langle u(x),\frac{\partial}{\partial y_j}\phi(x,z)\right\rangle\\ &= \langle u(x),\chi_\epsilon(x,z)\rangle.\end{aligned}$$

Από την επιλογή του δ, έχουμε οτι ο φορέας της $\chi_\epsilon(\cdot, z)$ περιέχεται στο $K(z)$. Από το Θεώρημα του Taylor έχουμε οτι όλα τα διαφορικά $\partial_x^\alpha \chi_\epsilon(x,z)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο 0 καθώς το $\epsilon \to 0$. Η σύγκλιση βέβαια είναι ως προς το x. Από τον ορισμό της χ_ϵ, έπεται οτι το διαφορικό $\frac{\partial}{\partial_j} g$ υπάρχει (για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$). Μάλιστα,

$$\frac{\partial}{\partial_j} g(y) = \left\langle u(x), \frac{\partial}{\partial_j} \phi(x,y) \right\rangle.$$

Συνεπώς, δικαιολογήσαμε το γεγονός οτι η παράγωγος μπαίνει εντός του εσωτερικού γινομένου, στη συνάρτηση δοκιμής. Τώρα, αφού η ϕ ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος, έπεται οτι και η $\frac{\partial}{\partial y_j}\phi$ ικανοποιεί τις υποθέσεις. Έτσι, από το προηγούμενο βήμα και αυτή είναι συνεχής (για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$) και άρα $g \in C^1(Y)$. Συνεχίζοντας επαγωγικά ως προς την τάξη του διαφορικού, έπεται οτι η $g \in C^\infty(Y)$ και μάλιστα,

$$\partial^\alpha \langle u(x), \phi(x,y) \rangle = \langle u(x), \partial^\alpha \phi(x,y) \rangle.$$

□

Πόρισμα 1.4.1. *Έστω $u \in \mathcal{D}'(X)$ και $\phi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Τότε, η συνάρτηση*

$$g : Y \to \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad y \mapsto g(y) := \langle u(x), \phi(x,y) \rangle,$$

(για $x \in X$ σταθεροποιημένο) ανήκει στον $\mathcal{D}(Y)$.

Απόδειξη. Παίρνοντας $U(y) = Y$, $\forall y \in Y$ και $K(y) =$η προβολή του $\mathrm{supp}(\phi)$ στο X στο πιο πάνω Θεώρημα έπεται οτι $g \in C^\infty(Y)$. Επίσης, ο $\mathrm{supp}(g)$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της προβολής του $\mathrm{supp}(\phi)$ στον Y. Έτσι, $g \in C_c^\infty(Y) \equiv \mathcal{D}(Y)$. □

Η σχέση (1.36) εμπεριέχει το μετασχηματισμό $y \mapsto f(x-y)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ο οποίος είναι σύνθεση της f με το γραμμικό μετασχηματισμό $y \mapsto x - y$. Αυτό μας δίνει έναυσμα για να το γενικεύσουμε στης κατανομές, δηλ. να ορίσουμε την κατανομή $u(x-y)$ και να οδηγηθούμε έτσι στον αντίστοιχο ορισμό της συνέλιξης κατανομών.

Έστω $h \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση. Μια μετάθεση της f είναι η συνάρτηση

$$\tau_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \text{με} \quad x \mapsto \tau_h f(x) := f(x-h).$$

Αν η f υποτεθεί συνεχής ή τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε η τ_h επάγει μια κατανομή $u_{\tau_h f}$ ως εξής:

$$u_{\tau_h f} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \phi \mapsto u_{\tau_h f}(\phi) \equiv \langle u_{\tau_h f}, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)\phi(x)\, dx.$$

Αλλά με ένα μετασχηματισμό έχουμε οτι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-h)\phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x+h)\, dx$$

και άρα

$$\langle u_{\tau_h f}, \phi \rangle = \langle f, u_{\tau_{-h}\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ο ομομορφισμός

$$g : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad \phi \mapsto g(\phi) := \tau_{-h}\phi$$

είναι συνεχής. Πράγματι: Έστω $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\mathrm{supp}(\phi) \subset K$, θέτοντας $K' := K + h = \{y + h \ : \ y \in K\}$, τότε $\mathrm{supp}(\tau_{-h}\phi) := \{y \ : \ (y+h) \in \mathrm{supp}(\phi)\} \subset K'$ Επίσης, αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, $N \in \mathbb{Z}_+$ και $\phi \in \mathcal{D}(K)$, τότε,

$$\sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha(\tau_{-h}\phi(x)| = \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha(\phi(x+h))| = \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha(\phi(x))|.$$

Έτσι, από την Αρχή του Δυϊσμού, έχουμε οτι η g επεκτείνεται σε απεικόνιση μεταξύ κατανομών, δηλ.

Ορισμός 1.4.1. *Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $h \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Τότε, η μεταφορά της u (κατά h) είναι η κατανομή $\tau_h u$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\tau_h u : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \textit{με} \quad \phi \mapsto \tau_h u(\phi) \equiv \langle \tau_h u, \phi \rangle := \langle u, \tau_{-h}\phi \rangle = \langle u(x), \phi(x+h) \rangle.$$

Συμβολίζουμε την κατανομή $\tau_h u$ με $u(x-h)$. Έχουμε οτι

$$\frac{\partial}{\partial_i}\tau_h u = \tau_h \frac{\partial}{\partial_i} u.$$

Απόδειξη. Πράγματι, για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial_i}\tau_h u, \phi \right\rangle &= -\left\langle \tau_h u, \frac{\partial}{\partial_i}\phi \right\rangle = -\left\langle u, \tau_{-h}\left(\frac{\partial}{\partial_i}\phi\right) \right\rangle \\ &= -\left\langle u, \frac{\partial}{\partial_i}\tau_{-h}\phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial_i} u, \tau_{-h}\phi \right\rangle = \left\langle \tau_h\left(\frac{\partial}{\partial_i} u\right), \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

□

Αυτό που κάναμε, ήταν να αναγάγουμε την έννοια μετάθεση κατανομής στην εκάστοτε συνάρτηση δοκιμής, σταθεροποιώντας όμως ένα $h \in \mathbb{R}^n$ κάθε φορά. Στο πνεύμα του να θεωρούμε τη συνάρτηση δοκιμής ώς συνάρτηση δύο μεταβλητών έχουμε οτι η απεικόνιση

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{με} \quad h \mapsto g(h) := \tau_h u$$

είναι C^∞ και μάλιστα

$$\frac{\partial}{\partial h_i}\tau_h u = -\frac{\partial}{\partial_i}\tau_h u.$$

Θα δείξουμε πρώτα οτι για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, η απεικόνιση $h \mapsto \langle \tau_h u, \phi \rangle$ είναι C^∞. Για τούτο θα χρησιμοποιήσουμε το Θέωρημα (1.4.1). Έστω $\delta > 0$. Ο φορέας της κατανομής $x \mapsto \phi(x+h)$ περιέχεται στο σύνολο $\mathrm{supp}(\tau_h\phi) \cap (h-\delta, h+\delta)$. Έτσι, από το Θεώρημα έχουμε οτι η συνάρτηση αυτή είναι C^∞. Επιπλέον, από το ίδιο Θέωρημα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial h_i}\langle \tau_h u, \phi \rangle &= \frac{\partial}{\partial h_i}\langle u(x), \phi(x+h) \rangle \overset{(1.39)}{=} \left\langle u(x), \frac{\partial}{\partial h_i}\phi(x+h) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial h_i} u(x), \phi(x+h) \right\rangle \left\langle \frac{\partial}{\partial h_i} u(x), \phi(x+h) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial h_i} u, \tau_{-h}\phi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial h_i} u(x), \phi \right\rangle \end{aligned}$$

Αφού έχουμε μελετήσει βασικές ιδιότητες της συνάρτησης $y \mapsto \langle u(x), \phi(x,y) \rangle$, όπου $u \in \mathcal{D}'(X)$, $\psi \in C_c^\infty(X \times Y))$ και $x \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο και $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά, μπορούμε να προχωρήσουμε στη διάσπαση του εσωτερικού γινομένου. Η διάσπαση αυτή καλείται τανυστικό γινόμενο κατανομών και (στην περίπτωση δύο κατανομών) γίνεται μέσω της σχέσης

$$\langle u \otimes v, \phi \rangle = \langle v(y), \rangle u(x), \phi(x,y) \rangle \rangle = \langle u(x), \langle v(x), \phi(x,y) \rangle \rangle.$$

Τα δυο επόμενα αποτελέσματα μας δικαιολογούν το πιο πάνω:

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ και $Y \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Τότε, ο υπόχωρος του $C_c^\infty(X \times Y) \equiv \mathcal{D}(X \times Y)$ που παράγεται από τις συναρτήσεις της μορφής $\phi \otimes \psi$ με $\phi \in C_c^\infty(X)$ και $\psi \in C_c^\infty(Y)$ είναι πυκνός στον $C_c^\infty(X \times Y)$.*

Απόδειξη Έστω $\Phi \in C_c^\infty(X \times Y)$. Θα δείξουμε οτι υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων $\Phi_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} \phi_j \otimes \psi_j$ με $\phi_j \in C_c^\infty(X)$ και $\psi_j \in C_c^\infty(Y)$ $(\ell \in \mathbb{N})$ η οποία συγκλίνει στην Φ στον $C_c^\infty(X \times Y)$. Θεωρώντας μια διαμέριση της μονάδος, το προς απόδειξη ανάγεται στην περίπτωση όπου ο $\operatorname{supp}(\Phi)$ περιέχεται σε έναν κύβο $\prod_{k=1}^{N}(\alpha_k, \beta_k)$ στον $\mathbb{R}^{m\times n}$ κατά τα γνωστά (αθροίζοντας τα μέρη που προκύπτουν) ή ακόμα σε έναν μοναδιαίο κύβο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{m\times n}$ από το παρακάτω Λήμμα, του οποίου η απόδειξη βρίσκεται στο [1]:

Λήμμα 1.4.1. *Έστω $N \in \mathbb{Z}_+$ και $I = (0,1)^N$ ο μοναδιαίος κύβος στο $\mathbb{R}^N$. Έστω $\phi \in C_c^\infty(I)$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $\phi_{j,k} \in C_c^\infty(0,1)$ $(j \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots)$ τέτοιες ώστε η ακολουθία*

$$\phi_m(z) := \sum_{j=1}^{m} \phi_{j,1}(z_1)\phi_{j,2}(z_2)\ldots\phi_{j,N}(z_N), \quad (m \in \mathbb{N})$$

να συγκλίνει στη ϕ στον $C_c^\infty(I)$.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ και $Y \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Έστω $u \in \mathcal{D}'(X)$ και $v \in \mathcal{D}'(Y)$. Τότε, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο του χώρου $\mathcal{D}'(X \times Y)$ το οποίο καλείται το τανυστικό γινόμενο των u και v και συμβολίζεται με $u \otimes v$ και το οποίο ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle u \otimes v, \phi \otimes \psi\rangle = \langle u, \psi\rangle \cdot \langle v, \psi\rangle, \quad \psi \in C_c^\infty(X), \quad \psi \in C_c^\infty(Y). \tag{1.40}$$

Απόδειξη. Αν ισχύει η σχέση (1.40), τότε για $\Phi = \sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes \psi_j$, όπου $\phi_j \in C_c^\infty(X)$ και $\psi_j \in C_c^\infty(Y)$, έχουμε οτι

$$\langle u \otimes v, \Phi\rangle = \left\langle u \otimes v, \sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes \psi_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle u, \phi_j\rangle \cdot \langle v, \psi_j\rangle. \tag{1.41}$$

Έτσι, η σχέση (1.40) καθορίζει μια γραμμική μορφή στον υπόχωρο του $C_c^\infty(X \times Y)$ που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $\phi \otimes \psi$. Αλλά, από το Θεώρημα (1.4.2) έχουμε (αν η σχέση ισχύει) τη μοναδικότητα γραφής. Θα δείξουμε οτι το τανυστικό γινόμενο υπάρχει, δηλ. οτι είναι καλά ορισμένο. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle u \otimes v, \Phi\rangle &= \left\langle u \otimes v, \sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes \psi_j \right\rangle \\
&= \left\langle v, \sum_{j=1}^{m} \langle u, \phi_j\rangle \psi_j \right\rangle \\
&= \langle u(y), \langle u(x), \Phi(x,y)\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Αν $\phi \in C_c^\infty(X \times Y)$, είδαμε οτι συνάρτηση $y \mapsto \langle u(x), \phi(x,y)\rangle$ ανήκει στον $C_c^\infty(Y)$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική μορφή $u \otimes v$ στον $C_c^\infty(X \times Y)$ με τη σχέση

$$\langle u \otimes v, \phi\rangle := \langle v(y), \langle u(x), \phi(x,y)\rangle\rangle, \quad \phi \in C_c^\infty(X \times Y). \tag{1.42}$$

Αν η ϕ είναι της μορφής $\sum_{j=1}^{m} \phi_j \otimes \psi_j$, όπου $\phi_j \in C_c^\infty(X)$ και $\psi_j \in C_c^\infty(Y)$, τότε η (1.42) είναι η (1.41). Θα δείξουμε οτι η σχέση που ορίσαμε για το τανυστικό γινόμενο (1.42) είναι πράγματι κατανομή. Έστω λοιπόν $K \subset X \times Y$ συμπαγές. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{x \in X \,:\, \exists y \,:\, (x,y) \in K\} \\
K_2 &= \{y \in Y \,:\, \exists x \,:\, (x,y) \in K\}.
\end{aligned}$$

Τα K_1 και K_2 είναι ουσιαστικά οι προβολές πάνω στα X και Y αντίστοιχα. Θεωρούμε μια $\phi \in C_c^\infty(X \times Y)$ τέτοια ώστε $\operatorname{supp}(\phi) \subset K$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : Y \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad y \mapsto \langle u(x), \phi(x,y)\rangle.$$

Έχουμε οτι $\operatorname{supp}(\psi) \subset K_2$. Συνεπώς, υπάρχουν $M, N \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε

$$|\langle u, g\rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq M} \sup |\partial^\beta g|.$$

Αλλά, από το Θεώρημα (1.4.1) έχουμε οτι

$$\partial^\beta g(y) = \partial^\beta \langle u(x), \phi(x,y)\rangle = \langle u(x), \partial_y^\beta \phi(x,y)\rangle.$$

Αλλά ο φορέας της σνάρτησης $x \mapsto \partial_y^\beta \phi(x,y)$ περιέχεται στο K_1, επομένως, υπάρχει σταθερά $C_1 \geq 0$ και $M_1 \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε

$$|\partial^\beta g(y)| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq M_1} \sup_{x \in K_1} |\partial_x^\alpha (\partial_y^\beta \phi(x,y))| \leq C_1 \sum_{|\alpha| \leq M1} \sup |\partial_x^\alpha (\partial_y^\beta \phi)|.$$

Από τις δύο αυτές ανισότητες, παίρνουμε ένα φράγμα για την $|\langle u, g\rangle| = |\langle v(y), \langle u(x), \phi(x,y)\rangle\rangle| = |\langle u \otimes v, \phi\rangle|$. $\square$

Παρατηρήσεις 1.4.1. *Στο πιο πάνω Θεώρημα ορίσαμε κατά μοναδικό τρόπο το τανυστικό γινόμενο $\otimes$ δύο κατανομών. Στην απόδειξη φαίνεται οτι αυτό ορίζει μια κατανομη μέσω της σχέσης*

$$\otimes : \mathcal{D}'(X) \times \mathcal{D}'(Y) \to \mathcal{D}'(X \times Y), \quad \mu\epsilon \quad (u, v) \mapsto u \otimes v$$

και

$$u \otimes v : \mathcal{D}(X \times Y) \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto \langle u \otimes v, \phi\rangle$$

και η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} \langle u \otimes v, \phi\rangle &= \langle u(x), \langle v(y), \phi(x,y)\rangle\rangle \\ &= \langle v(y), \langle u(x), \phi(x,y)\rangle\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(X \times Y) \quad [\text{Θεώρημα } \textbf{Fubini} \text{ για κατανομές}]. \end{aligned}$$

Στην απόδειξη δικαιολογείται το γεγονός οτι η συνάρτηση $y \mapsto \langle v(y), \phi(x,y)\rangle$ είναι στον $\mathcal{D}(X)$ ένεκα του οτι η $x \mapsto \phi(x,y),\ x \in X$ είναι C^∞ συνάρτηση με φορέα ένα $K \subset X$ συμπαγές. Οι τιμές της ανήκουν στον $\mathcal{D}(Y)$ και ορίζεται έτσι η $\langle u(x), \langle v(y), \phi(x,y)\rangle\rangle$. Ισχύει και η ανάλογη ισότητα αν εναλλάξουμε τις u, v. Επίσης είναι φανερό πως το $\otimes$ είναι μια διγραμμική μορφή στον $\mathcal{D}'(X) \times \mathcal{D}'(Y)$. Για το φορέα της κατανομής τανυστικό γινόμενο καθώς και το διαφορικό της έχουμε το εξής:

Πρόταση 1.4.1. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ και $Y \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά. Έστω $u \in \mathcal{D}'(X)$ και $v \in \mathcal{D}'(Y)$. Τότε,* $\operatorname{supp}(u \otimes v) = \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v)$. *Επιπλέον, για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ και $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ είναι*

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (u \otimes v) = \partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v. \tag{1.43}$$

Απόδειξη Έστω $\phi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Τότε, αν $\operatorname{supp}(\phi) \subset (X \times \operatorname{supp} u) \times Y$ ή $\operatorname{supp}(\phi) \subset X \times (Y \times \operatorname{supp} v)$, τότε $\langle u \otimes v, \phi\rangle = 0$ και αυτό έπεται από τον ορισμό του $u \otimes v$. Έτσι, αν $\operatorname{supp}(\phi) \cap \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v)$, τότε

$$\operatorname{supp}(u \otimes v) \subset \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v). \tag{1.44}$$

Τώρα, αν $x \in \operatorname{supp}(u)$ και $y \in \operatorname{supp}(v)$, τότε υπάρχουν $\phi \in \mathcal{D}(X)$ και $\psi \in \mathcal{D}(Y)$ τέτοιες ώστε $\langle u, \phi\rangle \neq 0$ και $\langle v, \psi \langle \neq 0$. Αλλά, $\langle u \otimes v, \phi \otimes \psi\rangle$, έτσι $(x, y) \in \operatorname{supp}(u \otimes v)$. Συνεπώς,

$$\operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v) \subset \operatorname{supp}(u \otimes v). \tag{1.45}$$

Από τις (1.44) και (1.45) έπεται οτι

$$\operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v) = \operatorname{supp}(u \otimes v).$$

Η (1.43) είναι φανερή από το Θεώρημα (1.4.3). Όμως, έχοντας ορίσει την κατανομή τανυστικό γινόμενο, ο υπολογισμός είναι: Έστω $\phi \in \mathcal{D}(X \times Y)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle \partial_y^\beta (u \otimes v), \phi \rangle &= (-1)^{|\beta|} \langle u \otimes v, \partial_y^\beta \phi \rangle \\
&= (-1)^{|\beta|} \langle u(x), \langle v(y), \partial_y^\beta \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle u(x), (-1)^{|\beta|} \langle v(y), \partial_y^\beta \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle u(x), \langle \partial_y^\beta v(y), \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle u \otimes \partial_y^\beta v, \phi \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle \partial_x^\alpha (\partial_y^\beta (u \otimes v)), \phi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u \otimes \partial_y^\beta v, \partial_x^\alpha \phi \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle \partial_y^\beta v(y), \langle u(x), \partial_x^\alpha \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle \partial_y^\beta v(y), (-1)^{|\alpha|} \langle u(x), \partial_x^\alpha \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle \partial_y^\beta v(y), \langle \partial_x^\alpha u(x), \phi(x,y) \rangle \rangle \\
&= \langle \partial_x^\alpha u \otimes \partial_y^\beta v, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Εφαρμογή Τα πιο πάνω γενικεύονται και για περισσότερες από δύο κατανομές. Για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, έχουμε για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}
\langle \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \delta(x_3), \phi \rangle &= \langle \delta(x_1), \langle \delta(x_2) \otimes \delta(x_3), \phi(x_1, x_2, x_3) \rangle \rangle \\
&= \langle \delta(x_1), \langle \delta(x_2), \langle \delta(x_3), \phi(x_1, x_2, x_3) \rangle \rangle \rangle \\
&= \langle \delta(x_1), \langle \delta(x_2), \phi(\cdot, \cdot, x_3) \rangle \rangle \\
&= \langle \delta(x_1), \phi(\cdot, x_2, x_3) \rangle \\
&= \phi(x_1, x_2, x_3) \\
&= \langle \delta, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\delta(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \delta(x_3),$$

για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Επίσης, αφού $\partial H = \delta$ (στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$), η (1.43) μας δίνει οτι

$$\partial_1 \partial_2 \partial_3 (H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes H(x_3)) = \partial_1 H(x_1) \otimes \partial_2 H(x_2) \otimes \partial_3 H(x_3) = \delta,$$

δηλ.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} (H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes H(x_3)) = \delta.$$

Γενικότερα στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε οτι

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1) \otimes \delta(x_2) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n)$$

και $\partial_1 \partial_2 \ldots \partial_n (H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes \ldots \otimes H(x_n)) = \delta$, δηλ.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} (H(x_1) \otimes H(x_2) \otimes \ldots \otimes H(x_n)) = \delta.$$

Ασκήσεις 1.4.1. *1. Έστω $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ με $\partial_n u = 0$. Τότε, υπάρχει $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ τέτοια ώστε*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle v, \widetilde{\phi}_n \rangle, \quad (\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)),$$

όπου

$$\widetilde{\phi}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\mathbb{R}} \tau_{te_n} \phi(x_1, \ldots, x_n) \, dt.$$

2. *Έστω* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Τότε,* $\partial_n u = 0$ *αν και μόνο αν* $u = v(x_1, \ldots, x_{n-1}) \otimes 1(x_n)$, *όπου* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ *και* $1(x) = 1$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$.

3. *Έστω* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Τότε,* $x_n u = 0$ *αν και μόνο αν* $u = v(x_1, \ldots, x_{n-1}) \otimes \delta(x_n)$, *όπου* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$. ***([2]'σκηση 4.5)***

4. *Έστω* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *ομογενής βαθμού* λ, *όπου* $\lambda \in \mathbb{C}$, *δηλ.* $u_t = t^\lambda u$. *Δείξτε οτι η κατανομή* $\partial^\alpha u$ *είναι ομογενής βαθμού* $\lambda - |\alpha|$ *και οτι ισχύει η εξίσωση*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i u = \lambda u \qquad\qquad [Euler].$$

([2]Άσκηση 4.3)

Ασκήσεις 1.4.2. 1. *Καταρχήν, αν* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *τότε*

$$\widetilde{\phi}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dt.$$

Για να μεταβούμε από μια κατανομή στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *σε μια κατανομή του* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, *θα πρέπει να σπάσουμε την τυχούσα* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *σε τανυστικό γινόμενο μια* $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ *με μια* $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *η οποία δεύτερη θα πρέπει να ικανοποιεί κάποια συνθήκη σύμφωνα με την υπόθεση οτι* $\partial_n u = 0$. *Έστω λοιπόν* $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ *με*

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, dt = 1. \tag{1.46}$$

Τότε, για κάθε $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ *είναι*

$$(\psi \otimes \chi)(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n) \otimes \chi(x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot \chi(x_n).$$

Για διευκόλυνση των υπολογισμών θέτουμε $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ *και* $x_n = z$. *Προφανώς* $\psi \otimes \chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Ορίζουμε την κατανομή* v *ως εξής:*

$$\langle v, \psi \rangle = \langle u, \psi \otimes \chi \rangle.$$

Η $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ *ως ακολουθιακά συνεχής. Έστω τώρα* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Τότε, για* $\widetilde{\phi}$ *όπως στην υπόθεση, έχουμε οτι*

$$(\widetilde{\phi} \otimes \chi)(x_1, \ldots, x_n) = \widetilde{\phi}(x') \otimes \chi(x) = \widetilde{\phi}(x')\chi(z).$$

Μελετάμε τη διαφορά $\phi - \widetilde{\phi} \otimes \chi$. *Θέτουμε*

$$f(x', z) \quad := \quad \int_z^\infty [\phi(x, z) - \widetilde{\phi}(x')\chi(z)]\, dz = \int_z^\infty \left[\phi(x', z) - \chi(z) \int_{\mathbb{R}} \phi(x', z) \right] dz$$

Τότε, αφού

$$\int_{\mathbb{R}} [\phi(x', z) - \widetilde{\phi}(x')\chi(z)]\, dz = \int_{\mathbb{R}} \phi(x', z)\, dz - \widetilde{\phi}(x') \int_{\mathbb{R}} \chi(z)\, dz \overset{(1.46)}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(x', z)\, dz - \widetilde{\phi}(x') = 0,$$

για κάθε $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, *η* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Τέλος,*

$$\partial_n f(x', z) = \frac{\partial}{\partial z} \int_z^\infty [\phi(x', z) - \widetilde{\phi}(x')\chi(z)]\, dz = \phi - \widetilde{\phi} \otimes \chi.$$

Έτσι,

$$0 = \langle \partial_n u, f \rangle = -\langle u, \partial_n f \rangle = -\langle u, \phi - \widetilde{\phi} \otimes \chi \rangle = -\langle u, \phi \rangle + \langle \widetilde{\phi} \otimes \chi \rangle = -\langle u, \phi \rangle + \langle v, \widetilde{\phi} \rangle.$$

Άρα, $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \widetilde{\phi} \rangle$.

2. *Έστω* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Τότε,* $\partial_n u = 0$ *αν και μόνο αν* $u = v(x_1, \ldots, x_{n-1}) \otimes 1(x_n)$, *όπου* $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ *και* $1(x) = 1$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$.

   Παρατηρήσεις 1.4.2. *Η* $\widetilde{\phi}$ *παίζει τον ρόλο της παράγουσας.*

3. *Με* $v, \widetilde{\phi}$ *και* f *όπως στην προηγούμενη άσκηση έχουμε*

$$\begin{aligned} \langle u, \phi \rangle - \langle v \otimes 1(x_n), \phi \rangle &= \langle u - v \otimes 1(x_n), \phi \rangle \\ &= \langle u, \partial_n f \rangle \\ &= -\langle \partial_n u, f \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

   από υπόθεση (αφού $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*). Με τον τρόπο αυτό φαίνεται καθαρά ο δυϊκός τρόπος σκέψης.*

4. *Θα ορίσουμε τη* $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ *δυϊκά ευρίσκοντας όπως και πρίν μια* χ *τέτοια ώστε* $\phi = \widehat{\phi} \otimes \chi$ *οδηγούμενοι από το ότι θα πρέπει*

$$\langle v \otimes \delta(x_n), \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle. \tag{1.47}$$

   Έστω λοιπόν $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *τέτοια ώστε* $\chi(0) = 1$. *Έστω* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Ορίζουμε μια κατανομή* v *μέσω της σχέσης*

$$\langle v, \psi \rangle = \langle u, \widetilde{\phi} \otimes \chi \rangle. \tag{1.48}$$

   Θα προσδιορίσουμε τη μορφή της $\widetilde{\phi}$ *μέσα από τις σχέσεις* (1.47) *και* (1.48). *Είναι*

$$\begin{aligned} \langle v \otimes \delta(x_n), \phi \rangle &= \langle v(x'), \langle \delta(x_n), \phi(x', x_n) \rangle \rangle \\ &= \langle v(x'), \phi(x', 0) \rangle \\ &\overset{(1.48)}{=} \langle u(x', x_n), x_n \chi(x_n) \phi(x', 0) \rangle. \end{aligned}$$

   Έτσι, $\widetilde{\phi}(x') := \phi(x', 0)$. *Θέτοντας*

$$f(x', x_n) := \phi(x) - \chi(x_n) \widetilde{\phi},$$

   έχουμε οτι $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Τέλος,*

$$\langle u, \phi \rangle - \langle v \otimes \delta(x_n), \phi \rangle = \langle u, x_n f \rangle = \langle x_n u, f \rangle = 0$$

   από υπόθεση. Έτσι, $u = v \otimes \delta(x_n)$, *ως κατανομές.*

5. *Έστω* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. *Η* u *είναι ομογενής βαθμού* λ, *δηλ.* $u_t = t^\lambda u$, *δηλ.*

$$\langle u, \phi \rangle = t^{n+\lambda} \langle u, \phi(xt) \rangle. \tag{1.49}$$

   Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}^n_n$. *Θα δείξουμε οτι η* $\partial^\alpha u$ *είναι ομογενής βαθμού* $\lambda - |\alpha|$, *δηλ. οτι Θα παραγωγίσουμε την* (1.49) :

$$\Rightarrow \langle \partial^\alpha u, \phi \rangle \quad = \quad (-1)^\alpha \langle u, \partial^\alpha \phi(x) \rangle$$

1.4.1 Συνέλιξη

Επιστρέφοντας στον αρχικό μας σκοπό ο οποίος είναι γενίκευση της σχέσης (1.37) στις κατανομές. Με την ορολογία του τανυστικού γινομένου που εισαγάγαμε στην προηγούμενη παράγραφο, το ανάλογο της σχέσης αυτής είναι

$$\langle u * v, \phi \rangle = \langle u(x) \otimes v(y), \phi(x + y) \rangle, \tag{1.50}$$

για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θα προσδιορίσουμε συνθήκες για να ορίζει κατανομή το πιο πάνω. Αν οι u και v έχουν συμπαγείς φορείς, τότε αφού $\operatorname{supp}(u \otimes v) = \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(v)$, τότε και η $u \otimes v$ θα έχει συμπαγή φορέα και άρα η (1.50) έχει νόημα. Εν γένει όμως, παρουσιάζεται πρόβλημα αφού η συνάρτηση $(x, y) \mapsto \phi(x + y)$ δεν έχει κατανάγκην συμπαγή φορέα. Αν όμως μια από τις u και v έχει συμπαγή φορέα, τότε δεν υπάρχει πρόβλημα και συγκεκριμένα, αν η μια από τις κατανομές ανήκει στο χώρο $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ και η άλλη στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Θα ορίσουμε το χώρο $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 1.4.2. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο. Μια γραμμική μορφή u στο διανυσματικό χώρο $C^\infty(X)$ καλείται* **συνεχής** *αν υπάρχει ένα $K \subset X$ συμπαγές, μια σταθερά $C \geq 0$ και $N \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε για κάθε $\phi \in C^\infty(X)$ να ισχύει*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|a| \leq N} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|.$$

Ο χώρος των γραμμικών συνεχών συναρτησοειδών στο χώρο $C^\infty(X)$ συμβολίζεται με $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Παρατηρήσεις 1.4.3. *Έστω $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ θέτουμε για κάθε $\epsilon > 0$,*

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\epsilon(x - y)\, dy = \langle f, \phi_\epsilon(x - \cdot)\langle.$$

Τότε αποδεικνύεται οτι $f_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και

$$f_\epsilon \overset{\epsilon \to 0+}{\longrightarrow} f$$

στον $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Το γεγονός αυτό μας δείχνει οτι ο $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ και $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε, ορίζεται μια κατανομή $u * v$ η οποία λέγεται η συνέλιξη των u και v μέσω της σχέσης*

$$\begin{aligned}
\langle u * v, \phi\rangle &= \langle u(x) \otimes v(y), \phi(x + y)\rangle \\
&= \langle u(x), \langle v(y), \phi(x + y)\rangle\rangle \\
&= \langle v(y), \langle u(x), \phi(x + y)\rangle\rangle,
\end{aligned}$$

για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη Έστω $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θα πολλαπλασιάσουμε τη ϕ με μια cutt-off συνάρτηση δοκιμής για να πετύχουμε μια καινούργια συνάρτηση δοκιμής η οποία έχει συμπαγή φορέα. Έστω λοιπόν $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\rho = 1$ σε μια περιοχή του $\operatorname{supp}(u)$. Έτσι, το σύνολο

$$\operatorname{supp}(\rho(x)\phi(x + y)) = \operatorname{supp}(\rho) \times (\operatorname{supp}(\phi) - \operatorname{supp}(\rho)) \tag{1.51}$$

είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε μια γραμμική μορφή $u * v : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\langle u * v, \phi\rangle = \langle u(x) \otimes v(y), \rho(x)\phi(x + y)\rangle, \tag{1.52}$$

(για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$). Μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά των u και v και άρα η μορφή αυτή είναι αντιμεταθετική. Επίσης, απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη, αφού δεν εξαρτάται από την επιλογή της cutt-off συνάρτησης. Πράγματι, αν $\sigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\sigma = 1$ σε μια περιοχή του $\operatorname{supp}(u)$, τότε

$$\begin{aligned}
& \langle u(x) \otimes v(y), \rho(x)\phi(x + y)\rangle - \langle u(x) \otimes v(y), \sigma(x)\phi(x + y)\rangle \\
= \;& \langle u(x) \otimes v(y), \rho(x)\phi(x + y) - \sigma(x)\phi(x + y)\rangle \\
= \;& \langle u(x) \otimes v(y), (\rho(x) - \sigma(x))\phi(x + y)\rangle \\
= \;& 0,
\end{aligned}$$

αφού $(\rho(x)-\sigma(x))\phi(x+y)=0$ σε μια περιοχή του $\mathrm{supp}(u\otimes v)=\mathrm{supp}(u)\times\mathrm{supp}(v)$. Έτσι,

$$\rho(x)-\sigma(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

δηλ. $\rho=\sigma$. Σταθεροποιούμε λοιπόν μία cut-off συνάρτηση ρ. Έστω $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έστω $K\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε, ο φορέας της συνάρτησης $x\mapsto\rho(x)\phi(x+y)$ περιέχεται στο $\mathrm{supp}(\rho)\times(K\setminus\mathrm{supp}(\rho))\subset\mathbb{R}^{n^2}$ συμπαγές. Έτσι, λόγω του οτι $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$|\langle u*v,\phi\rangle|=|\langle u(x)\otimes v(y),\rho(x)\phi(x+y)\rangle|\leq C\sum_{|\alpha|\leq N}|\partial_x^\alpha[\rho(x)\phi(x+y)]|,$$

για κάποια σταθερά $C\geq 0$ και $N\in\mathbb{Z}_+$. Επομένως, η σχέση (1.52) καθορίζει μια κατανομή. Τώρα,

$$\begin{aligned}\langle u*v,\phi\rangle &= \langle u(x)\otimes v(y),\rho(x)\phi(x+y)\rangle\\ &= \langle v(y),\langle u(x),\rho(x)\phi(x+y)\rangle\\ &= \langle u(x),\rho(x)\langle v(y),\phi(x+y)\rangle\rangle\\ &= \langle u(x),\langle v(y),\phi(x+y)\rangle\rangle\\ &= \langle v(y),\langle u(x),\phi(x+y)\rangle\rangle.\end{aligned}$$

■

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω $u,v\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ με μια τουλάχιστον από αυτές να έχει συμπαγή φορέα. Τότε* $\mathrm{supp}(u*v)\subset\mathrm{supp}(u)+\mathrm{supp}(v)$.

Απόδειξη. Άσκηση □

1.4.2 Ιδιότητες της Συνέλιξης

Κανονικοποίηση μέσω συνέλιξης Έστω $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Έστω επίσης μια $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\equiv C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Θα σχηματίσουμε μια νέα κατανομή, η οποία καλείται ***η κανονικοποίηση*** των u και f. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathbb{R}^n\ni x\mapsto(u*f)(x):=\langle u(y),f(x-y)\rangle.$$

Τότε, αφού η f έχει συμπαγή φορέα, από το Θεώρημα (1.4.4), έπεται οτι αυτή ορίζει μια κατανομή. Έστω τώρα μια $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θέλουμε να τροποποιήσουμε την ϕ έτσι ώστε αυτή να έχει συμπαγή φορέα στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μια $\sigma\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\sigma=1$ σε μια περιοχή του $\mathrm{supp}(\phi)$. Τότε, η απεικόνιση $(x,y)\mapsto\sigma(x)\phi(x-y)$ έχει συμπαγή φορέα. Έτσι, ορίζεται το τανυστικό γινόμενο των ϕ και u ως εξής:

$$\begin{aligned}\langle\phi(x)\otimes u(y),\sigma(x)f(x-y)\rangle &= \langle\phi(x),\langle u(y),\sigma(x)f(x-y)\rangle\rangle\\ &= \int\langle u(y),f(x-y)\phi(x)\rangle\\ &= \left\langle u(y),\int\phi(x)f(x-y)\,dx\right\rangle\\ &= \left\langle u(y),\int\phi(x+y)f(x)\,dx\right\rangle\\ &= \langle u(y),\langle f(x),\phi(x+y)\rangle\\ &= \langle f*u,\phi(x+y)\rangle.\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\langle f*u,\phi\rangle=\langle\phi(x),\langle u(y),f(x-y)\rangle\rangle.$$

Από το Θεώρημα (1.4.1) έχουμε οτι η συνάρτηση $y \mapsto \langle u(y), f(x-y)\rangle$ ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και αφού η τυχούσα ϕ ανήκει στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε το οτι η $f * u$ ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Παρατηρήσεις 1.4.4. *1. Σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα, αν $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, τότε η συνέλιξή των είναι η συνάρτηση*

$$x \mapsto u * f(x) := u(\tau_x \widetilde{f}) = \langle u, f(x - \cdot)\rangle,$$

όπου $\widetilde{f}(y) = f(-y)$. Επίσης, είδαμε οτι η $u * f$ ορίζει κατανομή από το Θεώρημα. Αντί αυτού, μπορούσαμε να το αποδείξουμε ως εξής: η συνάρτηση $u * f$ είναι C^∞ και άρα φραγμένη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, η $\phi \mapsto \langle (u*f)(x), \phi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (u*f)(x)\phi(x)\,dx$ είναι γραμμική και συνεχής ως προς την τοπολογία του $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, άρα κατανομή.

2. Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Έστω $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $\phi = \widetilde{(\widetilde{\phi})} = \tau_{x=0}(\widetilde{(\widetilde{\phi})})$. Έτσι,

$$\langle u, \phi\rangle = \langle u, \tau_{x=0}(\widetilde{(\widetilde{\phi})})\rangle = (u * \widetilde{\phi})(0). \tag{1.53}$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας λέει οτι η συνέλιξη είναι συνεχής ως προς κάθε συνιστώσα χωριστά:

Θεώρημα 1.4.6. *1. Έστω $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Έστω $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $v_j \to v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$u * v_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} u * v,$$

στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και έστω $(v_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $v_j \to v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και τέτοια ώστε τα σύνολα $\operatorname{supp}(v_j)$, $j \in \mathbb{N}$ να περιέχονται σε ένα σταθεροποιημένο συμπαγές σύνολο K. Τότε,

$$u * v_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} u * v,$$

στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη

1. Έστω $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, αφού η $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, έπεται οτι η συνάρτηση $y \mapsto \langle u(x), \phi(x+y)\rangle$, $(j \in \mathbb{N})$ έχει συμπαγή φορέα και είναι κλάσης C^∞, δηλ. ανήκει στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έτσι, ορίζεται η συνέλιξη $u * v_j$ και η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\langle u * v_j, \phi\rangle = \langle v_j(y), \langle u(x), \phi(x+y)\rangle\rangle.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \langle u * v_j, \phi\rangle &= \lim_{j\to\infty} \langle v_j(y), \langle u(x), \phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle v(y), \langle u_j(x), \phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle u * v, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$u * v_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} u * v,$$

στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

2. Για το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος, χρησιμοποιούμε τη γνωστή τεχνική κανονικοποίησης με μια cutt-off συνάρτηση ρ, (δηλ. $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\rho = 1$ σε μια περιοχή του K. Τότε, για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε ότι η συνάρτηση $y \mapsto \rho(y)\langle u(x), \phi(x+y)\rangle$ είναι κλάσεως C^∞ και έχει συμπαγή φορέα. Έτσι, όπως και στο πρώτο μέρος,

$$\lim_{j\to\infty} \langle u * v_j, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle v_j(y), \rho(y)\langle u(x), \phi(x+y)\rangle\rangle = \langle u * v, \phi\rangle$$

και το συμπέρασμα έπεται.

$\boxed{\textbf{Παραδείγματα}}$ **1.4.1.** *1. Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε, ορίζεται η $\delta * u$ και για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε*

$$\langle \delta * u, \phi\rangle = \langle u(x), \langle \delta(y), \phi(x+y)\rangle\rangle = \langle u(x), \phi(x)\rangle$$

και άρα

$$\delta * u = u.$$

2. Το πιο πάνω Θέωρημα μας δίνει έναν εύχρηστο τρόπο να υπολογίζουμε το όριο κατανομών, ιδίως όταν αυτές αποτελούνται από συνέλιξη με μια κατανομή Dirac. Για παράδειγμα, αν $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ με $\operatorname{supp}(\phi) = \mathbb{B}_n(0,1)$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$, θέτοντας για κάθε $\epsilon > 0$

$$\phi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n}\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

(δηλ. την κανονικοποίηση της ϕ) είδαμε οτι $\phi_\epsilon \overset{\epsilon\to0+}{\longrightarrow} \delta$ στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Αν τώρα $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, θέτουμε (για κάθε $\epsilon > 0$)

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi_\epsilon(x-y)\,dy = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)dy = \frac{1}{\epsilon^n}\langle f, \phi_\epsilon(x-\cdot)\rangle.$$

Δηλ. $f_\epsilon = f * \phi_\epsilon$ και αφού $\phi_\epsilon \to \delta$, έπεται από το Θεώρημα οτι

$$f_\epsilon \overset{\epsilon\to0+}{\longrightarrow} f * \delta = f.$$

Λήμμα 1.4.2. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και $a \neq 0$. Θέτουμε*

$$f_a(x) := \frac{f(x+ae_j) - f(x)}{a}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

όπου span$\{e_j : j = 1,2,\ldots,n\} = \mathbb{R}^n$. Τότε, $f_a \to \partial_j f$, στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ καθώς το $a \to 0$.

ΑπόδειξηΈστω τυχόντα $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$. Θα δείξουμε οτι $\sup|x^\alpha\partial^\beta(f - \partial_j f)| \to 0$. Αλλά,

$$\partial^\beta(f - \partial_j f) = \partial^\beta f - \partial^\beta\partial_j = \partial^\beta f - \partial_j\partial^\beta f,$$

μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\beta = 0$. Έστω $t \in \mathbb{B}^n(0,1)$. Τότε, από το θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $\eta \equiv \eta(x) > 0$ τέτοιο ώστε $|\eta| < 1$ και $f_t(x) = \partial_j f(x + \eta t e_j)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(f_t(x) - \partial_j f(x))| &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(\partial_j f(x+\eta t e_j) - \partial_j f(x)| \\
&\leq \sup_{\|x\|_1\leq M}|x^\alpha(\partial_j f(x+\eta e_j) - \partial_j f(x))| + \\
&\quad + \sup_{\|x\|_1>M}|x^\alpha(\partial_j f(x+\eta t e_j) - \partial_j f(x))| \\
&\leq \sup_{\|x\|_1\leq M}|x^\alpha(\partial_j f(x+\eta e_j) - \partial_j f(x))| + \sup_{\|x\|_1>M}|x^\alpha\partial_j f(x+\eta t e_j)| \\
&\quad + \sup_{\|x\|_1>M}|x^\alpha\partial_j f(x))|, \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

για κάποιο $M > 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η $\partial_j f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε οτι

$$\sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha \partial_j f(x))| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.55}$$

Αφού

$$|x_j| \leq |x_j + \eta t| + |\eta t| \leq |x_j + \eta t| + 1,$$

για $j = 1, 2, \ldots, n$, έχουμε οτι

$$|x^\alpha| := |x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}| \leq \left(\prod_{i \neq j} |x_i|^{\alpha_i} \right) (1 + |x_j + \eta t|)^{\alpha_j}.$$

Επιπλέον, αν $\|x\|_1 > M$, είναι $\|x + \eta t e_j\|_1 > M - 1$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\sup_{\|x\| > M} |x^\alpha \partial_j f(x + \eta t e_j)| &\leq \\
&\leq \sup_{\|x\| > M} \left(\prod_{i \neq j} |x_i|^{\alpha_i} \right) (1 + |x_j + \eta t|)^{\alpha_j} |\partial f(x + \eta t e_j)| \\
&\leq \sup_{\|x\| > M-1} \left(\prod_{i \neq j} |x_i|^{\alpha_i} \right) (1 + |x_j + \eta t|)^{\alpha_j} |\partial f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3},
\end{aligned} \tag{1.56}$$

αν το M υποτεθεί αρκετά μεγάλο και αφού η $\partial_j f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τέλος, αφού η $\partial_j f$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή υποσύνολα της $\overline{\mathbb{B}^n(0, M)}$, έπεται οτι για $|t|$ αρκετά μικρό,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial_j f(x + \eta t e_j) - \partial_j f(x)| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{1.57}$$

Από τις (1.54) – (1.57) έχουμε οτι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (f_t(x) - \partial_j f(x))| < \frac{\epsilon}{3}$$

και το αποτέλεσμα έπεται. ■

Λήμμα 1.4.3. *Έστω $k \in \mathbb{R}^n$ και έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$\tau_k f \xrightarrow{k \to 0} f$$

στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη Έστω $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Υποθέτουμε οτι $\|\alpha\|_1 := \sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (f(x - \alpha) - f(x))| &\leq \sup_{\|x\|_1 \leq M} |x^\alpha (f(x - a) - f(x)| + \\
&\quad + \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha f(x - a)| + \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha f(x)|.
\end{aligned}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Όπως και στο προηγούμενο Λήμμα, μπορούμε να βρούμε ένα $M > 0$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε

$$\sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha f(x - a)|, \quad \sup_{\|x\|_1 > M} |x^\alpha f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Τότε, αφού η f είναι είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα συμπαγή υποσύνολα της $\overline{\mathbb{B}^n(0,M)}$, έπεται οτι και

$$\sup_{\|x\|_1 \leq M} |x^\alpha(f(x-\alpha) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Έτσι,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha(f(x-\alpha) - f(x))| \stackrel{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Αλλά, αφού η $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έτσι και $\partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ και η πιο πάνω σχέση (αντικαθιστώντας με f την $\partial^\beta f$) μας δίνει οτι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta(f(x-\alpha) - f(x))| \stackrel{\alpha\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+$. Όμως, $f(x-\alpha) = \tau_\alpha f(x)$ και το συμπέρασμα έπεται. ■

Πόρισμα 1.4.2. *Εστω $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Αν $k \in \mathbb{R}^n$, τότε $\phi_k \stackrel{k\to 0}{\longrightarrow} \partial_j\phi$, για $j = 1, 2, \ldots, n$ και $\tau_h\phi \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \phi$ για $h \in \mathbb{R}^n$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*

Απόδειξη από το προηγούμενο Λήμμα τα συμπεράσματα έπονται στο χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αλλά αν $k \in \mathbb{B}_n(0,1)$, τότε υπάρχει ένα $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές τέτοιο ώστε $\mathrm{supp}(\phi_k) \subset K$ και άρα και $\mathrm{supp}(\partial_j\phi_k) \subset K$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ και άρα $\phi_k \stackrel{k\to 0}{\longrightarrow} \partial_j\phi$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ομοίως, για όλα τα $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|h\|_1 := \sum_{i=1}^n |h_i| < 1$, έχουμε οτι τα σύνολα $\mathrm{supp}(\phi)$ και $\mathrm{supp}(\tau_h\phi)$ βρίσκονται σε κάποιο σταθεροποιημένο συμπαγές σύνολο και άρα $\tau_h\phi \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \phi$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ■

Παρατηρήσεις 1.4.5. *Με βάση το πιο πάνω Πόρισμα, μπορούμε να δώσουμε ακόμη μια απόδειξη για το οτι η $u * f$ όπου $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι κατανομή. Η γραμμικότητα είναι προφανής, οπόταν μένει η συνέχεια. Για $y \to x$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε από το Πόρισμα οτι $\tau_y\widetilde{f} \to \tau_x\widetilde{f}$*

Λήμμα 1.4.4. *Εστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ ισχύει οτι*

$$\partial^\alpha(u * \phi) = (\partial^\alpha u) * \phi = u * (\partial^\alpha\phi).$$

Απόδειξη Έστω $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Από το προηγούμενο Θεώρημα, η $u * \phi$ είναι C^∞ και άρα υπάρχει το $\partial^\alpha(u*\phi)$. Θα δείξουμε το ζητούμενο για $\alpha \in \mathbb{Z}$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο. Έχουμε για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
\frac{(u*\phi)(x+he_j) - (u*\phi)(x)}{h} &= \frac{\langle u(x+he_j), \phi((x+he_j) - \cdot)\rangle - \langle u(x), \phi(x-\cdot)\rangle}{h} \\
&= \frac{\langle u, \tau_{x+he_j}\widetilde{\phi}\rangle - \langle u, \tau_x\widetilde{\phi}\rangle}{h} \\
&= \frac{\langle u, \tau_x(\tau_{he_j}\widetilde{\phi} - \widetilde{\phi})\rangle}{h}.
\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\lim_{h\to 0}(\tau_{he_j}\widetilde{\phi} - \widetilde{\phi}) = \partial_j\widetilde{\phi},$$

από το Πόρισμα (1.4.2). Έτσι,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(u*\phi)(x+he_j) - (u*\phi)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\langle u, \tau_x(\tau_{he_j}\widetilde{\phi} - \widetilde{\phi})\rangle}{h} \\
&= \langle u, \tau_x(-\partial_j\widetilde{\phi})\rangle \\
&= \langle u, \tau_x\widetilde{\partial_j\phi}\rangle \\
&= (u * \widetilde{\partial_j\phi})(x),
\end{aligned}$$

δηλ. το $\partial_j(u*\phi)(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$ και είναι ίσο με το $(u*\partial_j\phi)(x)$. Επίσης, για $x \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle u, \tau_x(-\partial_j\widetilde{\phi})\rangle &= -\langle u, \partial_j\tau_x\widetilde{\phi}\rangle \\ &= \langle \partial_j u, \tau_x\widetilde{\phi}\rangle \\ &= (\partial_j u*\phi)(x) \end{aligned}$$

και άρα

$$\partial_j(u*\phi) = u*\partial_j\phi = (\partial_j u)*\phi.$$

Επαγωγικά, ισχύει οτι

$$\partial^\alpha(u*\phi) = u*\partial^\alpha\phi = (\partial^\alpha u)*\phi.$$

■

Θεώρημα 1.4.7. *Έστω $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ και $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ισχύει οτι*

$$\partial^\alpha(u*v) = (\partial^\alpha u)*v = u*(\partial^\alpha v).$$

Επίσης, αν $h \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\tau_h(u*v) = \tau_h u*v = u*\tau_h v.$$

Απόδειξη Είδαμε οτι η κατανομή $u*v$ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\begin{aligned} \langle u*v, \phi\rangle &= \langle u(x)\otimes v(y), \phi(x+y)\rangle \\ &= \langle u(x), \langle v(y), \phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle v(y), \langle u(x), \phi(x+y)\rangle\rangle, \end{aligned}$$

για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ καθώς το ζητούμενο προκύπτει μετά με επαγωγή. Για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι

$$\begin{aligned} \langle \partial_j(u*v), \phi\rangle &= -\langle u*v, \partial_j\phi\rangle \\ &= -\langle u(x), \langle v(y), \partial_j\phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle u(x), \langle \partial_j v(y), \phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle u*\partial_j v, \phi\rangle. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\partial_j(u*v) = u*\partial_j v.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Fubini για το τανυστικό γινόμενο, παίρνουμε οτι

$$\partial_j(u*v) = \partial_j u*v.$$

Τέλος, αν $h \in \mathbb{R}^n$, τότε για $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι

$$\begin{aligned} \langle \tau_h(u*v), \phi\rangle &= \langle u*v, \tau_{-h}\phi\rangle \\ &= \langle u(x), \langle v(y), \tau_{-h}\phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle u(x), \langle \tau_h v(y), \phi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle u*\tau_h v, \phi\rangle. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\tau_h(u*v) = u*\tau_h v.$$

Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Fubini για το τανυστικό γινόμενο, παίρνουμε οτι

$$\tau_h(u*v) = \tau_h u*v.$$

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και έστω $\phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi).$$

Απόδειξη Καταρχήν, η έκφραση $(u*\phi)*\psi$ έχει νόημα διότι η $u*\phi \in C^\infty$ (από την Παράγραφο Κανονικοποίηση). Η έκφραση $u*(\phi*\psi)$ έχει επίσης νόημα, αφού η $\phi*\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θα βρούμε μια ακολουθία συναρτήσεων η οποία προσεγγίζει την $\phi*\psi$. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τα αθροίσματα Riemann

$$f_\epsilon(x) := \epsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-k\epsilon)\psi(k\epsilon).$$

Το πιο πάνω άθροισμα υπάρχει (για όλα τα ϵ) αφού τα σύνολα $\operatorname{supp}(\phi)$, $\operatorname{supp}(\psi)$ είναι συμπαγή. Επιπλέον, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε,

$$\operatorname{supp}(f_\epsilon) \subseteq \operatorname{supp}(\phi) + \operatorname{supp}(\psi).$$

Επίσης, $f_\epsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $\epsilon > 0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha f_\epsilon(x) &= \partial^\alpha\left(\epsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi(x-k\epsilon)\psi(k\epsilon)\right)\\
&= \epsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \partial_x^\alpha(\phi(x-k\epsilon))\psi(k\epsilon)\\
&\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha\phi(y)\cdot\psi(x-y)\,dy\\
&= ((\partial^\alpha\phi)*\psi)(x) = \partial^\alpha(\phi*\psi)(x),
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, με την πιο πάνω σύγκλιση να δικαιολογείται από το ότι το $\partial^\alpha\phi$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξαμε λοιπόν οτι $f_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \phi*\psi$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και άρα $\tau_x\widetilde{f_\epsilon} \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \tau_x(\widetilde{\phi*\psi})$ στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
(u*(\phi*\psi))(x) &= \langle u, \tau_x(\widetilde{\phi*\psi})\rangle\\
&= \langle u(x), \lim_{\epsilon\to 0}\tau_x(\widetilde{f_\epsilon})\rangle\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\langle u(x), \tau_x(\widetilde{f_\epsilon})\rangle\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle u(x), \phi(x-y-k\epsilon)\psi(k\epsilon)\rangle\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(u*\phi)(x-k\epsilon)\psi(k\epsilon)\\
&= ((u*\phi)*\psi)(x).
\end{aligned}$$

■

Τα επόμενα αποτελέσματα αναφέρονται στην περίπτωση του χώρου $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός 1.4.3. *Για $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε τη συνέλιξή τους, $u*f$ ως τη συνάρτηση*

$$(u*f)(x) = \langle u, f(x-\cdot)\rangle = \langle u, \tau_x\widetilde{f}\rangle.$$

Θεώρημα 1.4.9. *Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, η συνέλιξη $u*f$ των u και f είναι μια tempered distribution.*

Απόδειξη Η $u*f$ είναι C^∞ και η απόδειξη είναι όμοια με την περίπτωση του $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Μένει λοιπόν να δείξουμε οτι αυτή είναι πολυωνυμικά φραγμένη. Αφού $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, έχουμε οτι υπάρχει

$M > 0$ και $m, n \in \mathbb{Z}_+$ τέτοια ώστε

$$|\langle u, g\rangle| \leq M \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta g(x)| = C\|g\|_{k,m}. \tag{1.58}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε η $\tau_x \widetilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Έτσι, η (1.58) μας δίνει

$$\begin{aligned} |(u * f)(x)| &= |\langle u, \tau_x \widetilde{f}\rangle| \\ &\leq M \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha \partial_y^\beta \tau_x \widetilde{f}(y)| \\ &= M \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |y^\alpha \partial_y^\beta f(x-y)| \\ &= M \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq m}} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |(x-y)^\alpha \partial^\beta f(y)| \end{aligned}$$

Πόρισμα 1.4.3. *Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

$$(u * f) * g = u * (f * g).$$

Απόδειξη Από το Θεώρημα (1.1.3), ξέρουμε οτι ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Έτσι, υπάρχουν ακολουθίες $(\phi_n)_n$, $(\psi_k)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοιες ώστε $\phi_n \to f$ και $\psi_k \to g$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αλλά, η u περιορισμένη στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ανήκει στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και άρα από το Προηγούμενο Θεώρημα, έχουμε οτι

$$(u * \phi_n) * \psi_k = u * (\phi_n * \psi_k).$$

Έτσι, για $y \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημενο, έχουμε οτι

$$((u * \phi_n) * \psi_k)(y) = (u * \phi_n)(\tau_y \widetilde{\psi_k}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi_n)(x)\psi_k(y-x)\, dx.$$

Αλλά, αφού η $u * \phi_n$ ανήκει στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, είναι πολυωνυμικά φραγμένη και $(u * \phi_n) \to (u * f)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, έπεται οτι

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\phi_n)(x)\psi_k(y-x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^n} (u * f)(x)\psi_k(y-x)\, dx$$

και αφού το $\mathrm{supp}(\phi_k)$ είναι συμπαγές, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με $(u*f)*\psi_k(x)$. Δείξαμε λοιπόν οτι

$$((u * \phi_n) * \psi_k)(y) \to (u * f) * \psi_k(x). \tag{1.59}$$

Επίσης, $\phi_n * \psi_k \to f * \psi_k$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και άρα

$$(u * \phi_n) * \psi_k = u * (\phi_n * \psi_k) \to u * (f * \psi_k),$$

δηλ. $(u * f) * \psi_k = u * (f * \psi_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Αλλά, $\psi_k \to g$ και έτσι

$$((u * f) * \psi_k)(y) = \langle u * f, \tau_y \widetilde{\psi_k}\rangle \to (u * f) * g(y). \tag{1.60}$$

και

$$u * (f * \psi_k)(y) = \langle u, \tau_y (\widetilde{f * \psi_k})\rangle \to \langle u, \tau_y (\widetilde{f * g})\rangle = u * (f * g)(y). \tag{1.61}$$

Από τις (1.59) – (1.61) έπεται το ζητούμενο. ■

1.4.3 Συνέλιξη και Μετασχηματισμός Fourier

Σκοπός είναι να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier μιας κατανομής $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.4.10. *Έστω $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,*

1. $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.
2. $(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f} \cdot \widehat{g} = \widehat{f * g}$.
3. $f * g = g * f$ *και* $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Καταρχήν,

$$f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad (f * g)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(\lambda - x)\, dx.$$

1. Είναι

$$(\widehat{f \cdot g})(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda \cdot x} g(x) f(x)\, dx. \tag{1.62}$$

Θέτοντας $\phi(x) = e^{-i\lambda \cdot x} f(x)$, (για $\lambda \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο) έχουμε από την Πρόταση (1.3.2)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\phi) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \mathcal{F}(g(x))\, dx.$$

Έτσι,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi(x))) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi(x)) \mathcal{F}(g(x))\, dx,$$

δηλ.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi(x)) \widehat{g}(x)\, dx. \tag{1.63}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\widehat{f \cdot g})(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda \cdot x} g(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) g(x)\, dx \\
&\overset{(1.63)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\phi(x)) \widehat{g}(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot t} e^{-i\lambda \cdot t} f(t)\, dt \right] \widehat{g}(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda - x) \cdot t} f(t)\, dt \right] \widehat{g}(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\lambda - x) \widehat{g}(x)\, dx \\
&= (\widehat{f} * \widehat{g})(\lambda).
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{1.64}$$

2. Αντικαθιστώντας όπου f τον $\mathcal{F}^{-1}(f)$ στην (1.64) παίρνουμε
$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) * \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = f * g \tag{1.65}$$
και άρα $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αν στην πιο πάνω σχέση εναλλάξουμε τις f και g, το αποτέλεσμα δεν αλλάζει. Έτσι,
$$f * g = g * f.$$
Τώρα, για $\lambda \in \mathbb{R}^n$, έχουμε
$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(\lambda) = \mathcal{F}(f * g)(\lambda) &\overset{(1.65)}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g))(\lambda)\\
&\overset{\mathcal{F}\mathcal{F}(H)(\lambda)=H(-\lambda)}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}}(\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g))(-\lambda)\\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}^{-1}(f)(-\lambda)\mathcal{F}^{-1}(g)(-\lambda)\\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}(f)(\lambda)\mathcal{F}(g)(\lambda).
\end{aligned}$$
Συνεπώς,
$$\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}\cdot\widehat{g}. \tag{1.66}$$

3. Έχουμε
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * (g * h)) = \widehat{f * (g * h)} &\overset{(1.64)}{=} (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}\cdot\widehat{(g * h)}\\
&\overset{(1.64)}{=} (2\pi)^{n}\widehat{f}\cdot\widehat{g}\cdot\widehat{h}\\
&\overset{(1.66)}{=} (\widehat{(f * g) * h}) = \mathcal{F}((f * g) * h).
\end{aligned}$$

Το πιο πάνω Θεώρημα μας επιτρέπει να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης $f * g$ δύο $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(\lambda)\widehat{f}(\lambda)\,d\lambda &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\phi(\lambda)\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i\lambda\cdot x}f(x)\,dx\right)\,d\lambda\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\phi}(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda,
\end{aligned}$$
δηλ. $\langle\widehat{f}, \phi\rangle = \langle f, \widehat{\phi}\rangle$ ή
$$\langle\mathcal{F}(f), \phi\rangle = \langle f, \mathcal{F}(\phi)\rangle.$$
Επεκτείνοντας (μέσω συνέχειας στην τοπολογία του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) τον τελεστή $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ λαμβάνουμε τον αντίστοιχο τελεστή $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:
Αν $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε
$$\langle\mathcal{F}(u), \phi\rangle = \langle u, \mathcal{F}(\phi)\rangle.$$
Με το ίδιο σκεπτικό, η (1.16) μας δίνει τον αντίστοιχο τελεστή $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ο οποίος ορίζεται ως εξής:
Αν $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε
$$\langle\mathcal{F}^{-1}(u), \phi\rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}(\phi)\rangle.$$

Παρατηρήσεις 1.4.6. *1. Ο μετασχηματισμός Fourier μεταξύ κατανομών είναι ο*
$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \mu\epsilon \quad u \mapsto \mathcal{F}(u)$$
και ο οποίος δρά ως εξής: αν $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, τότε
$$\mathcal{F}(u) \equiv \widehat{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \quad \mu\epsilon \quad \phi \mapsto \langle\mathcal{F}(u), \phi\rangle = \langle u, \mathcal{F}(\phi)\rangle.$$
Ομοίως και για τον $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ισχύει οτι
$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}u = u,$$
για $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2. *Έστω $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Έστω u_g η κατανομή tempered που επάγεται από την g. Τότε, από την Πρόταση (1.3.2), έχουμε οτι*

$$\langle \mathcal{F}(u_g), \phi \rangle = \langle u_g, \mathcal{F}(\phi) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\widehat{\phi}(x)\,dx \overset{\Pi\rho.(1.3.2)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)\phi(x)\,dx = \langle u_{\widehat{g}}, \phi \rangle,$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Έτσι, μπορούμε να σκεφτόμαστε το μετασχηματισμό Fourier στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ως την επέκταση του αντίστοιχου στον $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.4.4 Κανονικοποίηση στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Έστω $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = 1$. Για $\epsilon \neq 0$ θέτουμε

$$g_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Τότε,

$$\widehat{g_\epsilon}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\lambda} \frac{1}{\epsilon^n} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\,dx$$

και θέτοντας $y = \frac{x}{\epsilon}$, το πιο πάνω γίνεται

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot\epsilon} g(y)\,dy, \tag{1.67}$$

δηλ.

$$\widehat{g_\epsilon}(\lambda) = \widehat{g}(\epsilon\lambda).$$

Έτσι,

$$\widehat{g_\epsilon}(\lambda) = \widehat{g}(\epsilon\lambda) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \widehat{g}(0). \tag{1.68}$$

Θεώρημα 1.4.11. *Έστω $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = 1$. Για $\epsilon \neq 0$ θέτουμε $g_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ισχύει*

$$g_\epsilon * f \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} f$$

στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη Αρκεί να δείξουμε οτι $\widehat{(g_\epsilon * f)} \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, γιατί τότε το ζητούμενο θα ισχύει παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier. Όμως, από το Θεώρημα (1.4.10) έχουμε οτι $\widehat{(g_\epsilon * f)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{g_\epsilon} \cdot \widehat{f}$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε οτι $[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g_\epsilon} - 1]\widehat{f} \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.Αλλά, η συνάρτηση $\lambda \mapsto \lambda^\alpha \partial^\beta \widehat{f}(\lambda)$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, έτσι, από το Θεώρημα του Leibniz, αρκεί να δείξουμε οτι

$$[\partial^\alpha((2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g_\epsilon} - 1)]\phi \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Έστω $|\alpha| = 0$. Τότε, για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}_\epsilon(\lambda) - 1]\phi(\lambda)| &= |[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}(\epsilon\lambda) - 1]\phi(\lambda)| \\
&\overset{(1.67)}{=} \left|\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\epsilon\cdot x} g(x)\,dy - 1\right)\phi(\lambda)\right| \\
&= \left|\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\epsilon\cdot x} g(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)\phi(\lambda)\right| \\
&= \left|\phi(\lambda)\int_{\mathbb{R}^n} g(x)(e^{-i\lambda\epsilon\cdot x} - 1)\,dy\right| \\
&\leq |\phi(\lambda)|\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\cdot|\epsilon\lambda\cdot x|\,dx \\
&= \epsilon|\lambda\phi(\lambda)|\int_{\mathbb{R}^n} |xg(x)|\,dx \\
&< \epsilon M,
\end{aligned}$$

για κάποιοα σταθερά $M > 0$ ανεξάρτητη του λ, αφού οι ποσότητες μέσα στο πιο πάνω ολοκλήρωμα είναι φραγμένες. Έτσι,

$$[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}_\epsilon(\lambda) - 1]\phi(\lambda) \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ομοιόμορφα (ως προς λ).
Αν $|\alpha| > 0$, τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|[\partial^\alpha((2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}_\epsilon - 1)](\lambda)\phi(\lambda)| &= |[\partial^\alpha((2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}_\epsilon)](\lambda)\phi(\lambda)| \\
&= |(2\pi)^{\frac{n}{2}}\partial^\alpha[\widehat{g}_\epsilon(\lambda)]\phi(\lambda)| \\
&= |(2\pi)^{\frac{n}{2}}\partial^\alpha[\widehat{g}(\epsilon\lambda)]\phi(\lambda)| \\
&= |(2\pi)^{\frac{n}{2}}\epsilon^{|\alpha|}(\partial^\alpha\widehat{g})(\epsilon\lambda)\phi(\lambda)| \\
&< \epsilon^{|\alpha|}M,
\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $M > 0$, αφού οι συναρτήσεις $\partial^\alpha\widehat{g}$ και ϕ είναι φραγμένες. Έτσι,

$$[\partial^\alpha((2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{g}_\epsilon - 1)]\phi \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ομοιόμορφα (ως προς λ). ■

Θεώρημα 1.4.12. *Έστω $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1.$$

Θέτουμε $f_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Τότε,

$$u * f_\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} u$$

στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (σταθεροποιημένη). Ομοίως, όπως τη σχέση (1.53), έχουμε οτι

$$\langle u * g_\epsilon, f\rangle = (u * g_\epsilon) * \widetilde{f}(0).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
(u * g_\epsilon)(f) &= (u * g_\epsilon) * \widetilde{f}(0) \\
&\overset{\Theta.\ 1.4.10}{=} u * (g_\epsilon * \widetilde{f})(0) \\
&\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} u * \widetilde{f}(0) \\
&= \langle u, f\rangle,
\end{aligned}$$

από το Θεώρημα 1.4.11. ■

Θεώρημα 1.4.13. *Έστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1.$$

Θέτουμε $\rho_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Τότε,

$$u * \rho_\epsilon \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} u$$

στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη Έστω $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (σταθεροποιημένη). Έστω $\epsilon \in (0,1)$. Τότε, τα σύνολα $\mathrm{supp}(\phi_\epsilon * \psi)$ ανήκουν σε κάποιο σταθεροποιημένο συμπαγές σύνολο το οποίο δεν εξαρτάται φυσικά από το εκάστοτε ϵ. Έτσι,

$$\phi_\epsilon * \psi \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} \psi$$

στον $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έτσι,

$$\begin{aligned}(u * \rho_\epsilon)(\psi) &= (u * \rho_\epsilon) * \widetilde{\psi}(0)\\ &\stackrel{\Theta.\ 1.4.10}{=} u * (\rho_\epsilon * \widetilde{\psi})(0)\\ &\stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} u * \widetilde{\psi}(0)\\ &= \langle u, \psi\rangle,\end{aligned}$$

από το Θεώρημα 1.4.11.

Ορισμός 1.4.4. *Έστω u και g_ϵ όπως στο Θεώρημα 1.4.12. Η $u * g_\epsilon$ καλείται η κανονικοποίηση της u.*

Η κανονικοποίηση μιας $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ μας βοηθά να λαμβάνουμε οριακά την κατανομή. Το επόμενο Θεώρημα μας δείχνει μια σημαντική εφαρμογή της έννοιας της συνέλιξης: ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Θεώρημα 1.4.14. *Ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, δηλ. αν $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, τότε υπάρχει ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\phi_n \to u$ στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη Το ζητούμενο είναι οτι υπάρχει ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\langle \phi_n, \psi\rangle \to \langle u, \psi\rangle$ για κάθε $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε μια $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\, dx = 1$ και θεωρούμε την κανονικοποίησή της, δηλ. τις $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $\epsilon > 0$. Τότε, $\phi_\epsilon \to \delta$ στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ και $\mathrm{supp}(\phi_\epsilon) \subset \mathrm{supp}(\phi)$ για κάθε ϵ. Έτσι, οι φορείς των ϕ_ϵ περιέχονται σε ένα (σταθεροποιημένο) συμπαγές σύνολο και άρα, από το Θεώρημα 1.4.6, έπεται οτι

$$\phi_\epsilon * u \to \delta * u = u \tag{1.69}$$

στον $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Αλλά όπως ξέρουμε, οι απεικονίσεις $\phi_\epsilon * u$ ανήκουν στον $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Έστω $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\rho = 1$ στην $\mathbb{B}_n(0,1)$. Θέτουμε

$$u_\epsilon := \rho(\epsilon n)\phi_\epsilon * u(x), \quad \epsilon > 0.$$

Τότε, αν $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\langle u_\epsilon, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u_\epsilon \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\phi_\epsilon * u)\phi(x)\, dx = \langle \phi_\epsilon * u, \phi\rangle$$

για αρκετά μεγάλο ϵ. Αλλά, από την (1.69) έχουμε οτι

$$\langle \phi_\epsilon * u, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$$

και το ζητούμενο έπεται. ■

Ισχύει το αντίστοιχο Θεώρημα στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

Θεώρημα 1.4.15. *Ο χώρος $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, δηλ. αν $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, τότε υπάρχει ακολουθία $(f_n)_n \subset \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $f_n \to u$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη

Θεώρημα 1.4.16. *Για κάθε $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ισχύουν:*

1. $\widehat{(u * f)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{u}$ *και*

2. $\widehat{u} * \widehat{f} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{fu}$.

Απόδειξη

1. Από το Θεώρημα (1.4.14) ο χώρος $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Έτσι, υπάρχει μια ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\phi_n \to u$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Συνεπώς, για δοθείσα $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{(u * f)}, g\rangle &:= \langle u * f, \widehat{g}\rangle = (u * f) * \widetilde{\widehat{g}}(0) \\
&= u * (f * \widetilde{\widehat{g}})(0) = \langle u, \widetilde{f * \widetilde{\widehat{g}}}\rangle \\
&= \langle u, \widetilde{f} * \widehat{g}\rangle \\
&= \lim_n \phi_n * (\widetilde{f} * \widehat{g}) = \lim_n \phi_n * (f * \widetilde{\widehat{g}})(0) \\
&= \lim_n \langle \phi_n * f, \widehat{g}\rangle = \lim_n \langle \widehat{\phi_n * f}, g\rangle \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \lim_n \langle \widehat{\phi_n}\widehat{f}, g\rangle = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\phi_n}(x)\widehat{f}(x)g(x)\, dx \\
&= \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \phi_n(x)\widehat{(\widehat{f}g)}(x)\, dx \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \langle u, \widehat{\widehat{f}, g}\rangle = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \langle \widehat{u}, \widehat{f}g\rangle \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \langle \widehat{f}\widehat{u}, g\rangle,
\end{aligned}
$$

δηλ.

$$\widehat{(u * f)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{u}.$$

2. Ομοίως.

1.5 Εφαρμογές των κατανομών στη Θεωρία ΜΔΕ

Η έννοια της κατανομής μας δίνει έναν άλλο τρόπο εύρεσης λύσεων διαφόρων προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων κυρίως λόγω του γεγονότος οτι η παραγώγιση της κατανομής ανάγεται στην παραγώγιση τις εκάστοτε συνάρτησης δοκιμής. Σημαντικό εργαλείο της διαδικασίας αυτής είναι και η συνέλιξη κατανομών. Προτού προχωρήσουμε, παραθέτουμε ορισμένα χρήσιμα στοιχεία, κυρίως από τον τομέα των Διαφορικών εξισώσεων.

1.5.1 Γραμμικοί Διαφορικοί τελεστές

Ας θυμηθούμε οτι ένα πολυώνυμο n μεταβλητών είναι της μορφής

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha x^\alpha,$$

όπου $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, αν $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και οι συντελεστές $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Έστω I ένα πεπερασμένο σύνολο πολυδεικτών. Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Έστω $(g_\alpha)_{\alpha \in I} \subset C^\infty(X)$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Καλούμε γραμμικό διαφορικό τελεστή με C^∞ συντελεστές το άθροισμα

$$P(x, \partial) = \sum_{\alpha \in I} g_\alpha(x) \partial^\alpha.$$

Αν $n = 1$ ή $n > 1$, ο τελεστής αυτός καλείται *συνήθης* ή *μερικός* αντίστοιχα. Το μεγιστικό στοιχείο m του συνόλου I καλείται η τάξη του P, δηλ. το στοιχείο

$$m := \max\{|\alpha| \ : \ \alpha \in I\}.$$

έτσι, ο τελεστής P λαμβάνει τη μορφή

$$P(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(x) \partial^\alpha. \tag{1.70}$$

Το m είναι ο ελάχιστος αριθμός για τον οποίο υπάρχει (τουλάχιστον) μια $g_\alpha \not\equiv 0$, όπου $\alpha \in I$ με $|\alpha| = m$. Έτσι, ο P είναι μια απεικόνιση από τον χώρο $\mathcal{D}(X)$ στον εαυτό του. Η απεικόνιση αυτή είναι ακολουθιακά συνεχής. Πράγματι, έστω $u \in \mathcal{D}'(X)$ και $(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(X)$ τέτοια ώστε $u_j \to u$. Τότε, από το Θεώρημα (;;) για κάθε $\alpha \in I$ με $|\alpha| \leq m$ και για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε οτι η απεικόνιση $u_j \mapsto g_\alpha \partial^\alpha u_j$ είναι ακολουθιακά συνεχής και άρα λόγω γραμμικότητας και η απεικόνιση $u_j \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(x) \partial^\alpha u_j$. Από το Θεώρημα (;;) έχουμε οτι για κάθε $\alpha \in I$ με $|\alpha| \leq m$,

$$\partial^\alpha u_j \to \partial^\alpha u.$$

Έτσι, η απεικόνιση $u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(x) \partial^\alpha u$ είναι ακολουθιακά συνεχής και άρα (για κάθε $u \in \mathcal{D}'(X)$) η $\sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(x) \partial^\alpha u$ ανήκει στον $\mathcal{D}'(X)$. Συγκεκριμένα, (για $u \in \mathcal{D}'(X)$) ο τύπος της Pu δίνεται ως εξής:

$$\langle Pu, \phi \rangle = \left\langle u, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (g_\alpha \phi) \right\rangle, \quad (\phi \in \mathcal{D}(X)).$$

Ο τελεστής

$$\phi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (g_\alpha \phi)$$

λέγεται ο συζυγής (adjoint) του P.

Ορισμός 1.5.1. *Έστω P ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής ο οποίος δίνεται από τη μορφή* (1.70). *Τότε, η συνάρτηση*

$$P(x, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha(x) \xi^\alpha : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

λέγεται το πλήρες σύμβολο του P. Η παράσταση

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} g_\alpha(x) \xi^\alpha$$

λέγεται το κυρίως σύμβολο του P.

Παρατηρήσεις 1.5.1. *Το κυρίως σύμβολο του P είναι ουσιαστικά το άθροισμα όλων των παραγόντων τάξης m στον P.*

Από το Θεώρημα του Leibniz, για $f \in C^\infty(X)$ και $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\begin{aligned} P(x,\partial)(fu) &= \sum_{|\alpha|\leq m} g_\alpha(x) \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta f \partial^\gamma u \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!} P^{(\alpha)}(x,\partial)u \\ &= \sum_{\alpha\geq 0} \frac{\partial^\alpha u}{\alpha!} P^{(\alpha)}(x,\partial)f, \end{aligned}$$

όπου $P^{(\alpha)}(x,\partial)$ είναι ο γραμμικός διαφορικός τελεστής με πλήρες σύμβολο το

$$P^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha P(x,\xi).$$

Έτσι, επεκτείναμε το Θεώρημα του Leibniz στους γραμμικούς διαφορικούς τελεστές.
Θα επεκτείνουμε τώρα την έννοια του Γραμμικού Διαφορικού Τελεστή στις πολλές διαστάσεις. Έστω $N > 1$ ακέραιος. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\mathcal{D}(X) \to \underbrace{\mathcal{D}'(X) \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}'(X)}_{N-\text{φορές}} \quad \text{με} \quad \phi \mapsto \langle u, \phi \rangle := (\langle u_1, \phi\rangle, \ldots, \langle u_N, \phi \rangle).$$

Με $(\mathcal{D}'(X))^N$ συμβολίζουμε το $\underbrace{\mathcal{D}'(X) \oplus \ldots \oplus \mathcal{D}'(X)}_{N-\text{φορές}}$. Έστω

$$P = (P_{k,\ell})_{k,\ell=1}^N = \begin{bmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1,\ell} \\ P_{21} & \ldots & P_{2,\ell} \\ \vdots & & \\ P_{k1} & \ldots & P_{k,\ell} \end{bmatrix},$$

όπου $P_{k,\ell}$, $(k,\ell = 1,\ldots,N)$ γραμμικοί διαφορικοί τελεστές με C^∞ συντελεστές. Τότε, έχουμε την απεικόνιση

$$(\mathcal{D}'(X))^N \to (\mathcal{D}'(X))^N \quad \text{με} \quad u := (u_1,\ldots,u_N) \mapsto \left(\sum_{\ell=1}^N P_{k,\ell}(x,\partial) u_\ell \right)_{k=1,\ldots,N}.$$

Εδώ, η $u = (u_1,\ldots,u_N)$ δρά στον $(\mathcal{D}(X))^N$ ως εξής:

$$(\mathcal{D}(X))^N \to (\mathcal{D}'(X))^N \quad \text{με} \quad \phi := (\phi_1,\ldots,\phi_N) \mapsto \langle u,\phi\rangle := \sum_{\ell=1}^N \langle u_\ell, \phi_\ell\rangle.$$

Έτσι, ο τελεστής P καθορίζεται από τη σχέση

$$\langle Pu, \phi \rangle = \langle u, {}^tP\phi\rangle,$$

όπου ${}^tP$ ο συζυγής του P, δηλ.

$${}^tP = ({}^tP_{k,\ell})_{k,\ell=1}^N = \begin{bmatrix} {}^tP_{11} & \ldots & {}^tP_{1,\ell} \\ {}^tP_{21} & \ldots & {}^tP_{2,\ell} \\ \vdots & & \\ {}^tP_{k1} & \ldots & {}^tP_{k,\ell} \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 1.5.1. *Έστω $P(x,\partial_x)$ ένας Γραμμικός Διαφορικός Τελεστής με αντίστοιχο κυρίως σύμβολο $P(x,\xi)$. Τότε,*

$$(\widehat{P(x,\partial_x)f})(\xi) = P(-\partial_\xi,\xi)\widehat{f}(\xi)$$

και

$$P(\xi,\partial_\xi)\widehat{f}(\xi) = [\widehat{P(\partial_x,-x)f(x)}](\xi).$$

Απόδειξη Έχουμε για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$(-\partial_\xi)^\alpha e^{-2\pi i x\cdot\xi} = x^\alpha e^{-2\pi i x\cdot\xi} \quad \text{και} \quad \partial_x^\alpha e^{2\pi i x\cdot\xi} = \xi^\alpha e^{2\pi i x\cdot\xi}$$

και άρα για κάθε πολυώνυμο q είναι

$$q(-\partial_\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi} = q(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi} \quad \text{και} \quad q(\partial_x)e^{2\pi i x\cdot\xi} = q(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}. \tag{1.71}$$

Έτσι, αν

$$P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(x)\partial^\alpha,$$

τότε

$$\begin{aligned}
(\widehat{P(x,\partial_x)f})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(x)\partial^\alpha f(x)\cdot e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\
&\overset{(1.71)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha f(x) g_\alpha(-\partial_\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\
&\overset{\text{κατά μέρη}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sum_{|\alpha|\le m} (-\partial_x)^\alpha[g_\alpha(-\partial_\xi)e^{-2\pi i x\cdot\xi}]\,d\xi \\
&\overset{(1.71)}{=} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(-\partial_\xi)[\xi^\alpha e^{-2\pi i x\cdot\xi}]\,d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(-\partial_\xi)\xi^\alpha\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\right] \\
&= P(-\partial_\xi,\xi)\widehat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα εναλλάξαμε ολοκλήρωση με άθροιση. Για το δεύτερο, με τα ίδια επιχειρήματα έχουμε:

$$\begin{aligned}
P(\xi,\partial_\xi)\widehat{f}(\xi) &= P(\xi,\partial_\xi)\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} p(\xi,-x)f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(\xi)(-x)^\alpha f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-x)^\alpha g_\alpha(\xi)\cdot e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\right] \\
&= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-x)^\alpha g_\alpha(-\partial_x)\cdot e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi\right] \\
&= \sum_{|\alpha|\le m}\left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} g_\alpha(\partial_x)[f(x)(-x)^\alpha]\,d\xi\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\left\{\left[\sum_{|\alpha|\le m} g_\alpha(\partial_x)(-x)^\alpha\right]f(x)\right\}d\xi \\
&= [\widehat{P(\partial_x,-x)f(x)}](\xi).
\end{aligned}$$

Συμβολισμός Έστω $P(x_1, \dots, x_n)$ ένα πολυώνυμο n μεταβλητών. Τότε, με $P(\partial) \equiv P(D)$ συμβολίζουμε το Γραμμικό Διαφορικό Τελεστή που προκύπτει μέσω της αντικατάστασης $\frac{\partial}{\partial_i} \equiv \partial x_i \leftrightarrow x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ στο P, δηλ.

$$P(D) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Για παράδειγμα, αν $P(x, y, z) = 9ix^2y + xz^3y + zx$, τότε, $P(D) = 9i\frac{\partial^3}{\partial x \partial x \partial z} + \frac{\partial^5}{\partial x \partial z \partial z \partial z \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}$. Ουσιαστικά, ο $P(D)$ είναι της μορφής (1.70) για g_α σταθερές. Με $\mathbb{C}[\partial_1, \dots, \partial_n] \equiv \mathbb{C}[\partial]$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των διαφορικών τελεστών.

Ορισμός 1.5.2. *Έστω P ένα πολυώνυμο στον $\mathbb{R}^n$. Αν g μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, τότε η $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ η οποία λύνει τη Δ.Ε $P(D)u = g$ λέγεται ασθενής λύση του $P(D)$. Το ίδιο ισχύει αν $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Στην περίπτωση που $g = \delta =$ η κατανομή Dirac, τότε η u η οποία λύνει τη Δ.Ε $P(D)u = \delta$ λέγεται θεμελιώδης λύση του $P(D) \in \mathbb{C}[\partial]$.*

Παρατηρήσεις 1.5.2.

1. *Ο μηδενικός διαφορικός τελεστής δεν έχει θεμελιώδη λύση. Ο σταθερός διαφορικός τελεστής $P(D) = c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ έχει (μοναδική) θεμελιώδη λύση την $v = \frac{1}{c}\delta$. Συνεπώς, η θεμελιώδης λύση δεν μπορεί να είναι μια συνάρτηση τοπικά ολοκληρώσιμη.*

2. *Αν $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, τότε η σχέση $P(D)u = g$ σημαίνει βέβαια*
$$\langle P(D)u, \phi\rangle = \langle g, \phi\rangle$$
για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Αν $g = \delta$, τότε η σχέση $P(D)u = \delta$ σημαίνει
$$\langle P(D)u, \phi\rangle = \langle \delta, \phi\rangle = \phi(0)$$
για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3. *Αν $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ είναι μια θεμελιώδης λύση του $P(D)$ (δηλ. $P(D)v = \delta$), τότε για κάθε $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ έχουμε*
$$v * (P(D)\phi) = P(D)(v * \phi) = (P(D)v) * \phi = \delta * \phi = \phi.$$
Άρα, αν $\phi = \delta$, έχουμε οτι
$$v * (P(D)\delta) = \delta$$
και άρα η v είναι η αντίστροφη συνέλιξη της $P(D)\delta$ η οποία έχει φορέα το 0.
Το ανάλογο όταν η $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ είναι το εξής:
$$\widehat{v} \cdot P = \widehat{\delta} = 1,$$
δηλ. ο μετασχηματισμός Fourier της v είναι ο πολλαπλασιαστικός αντίστροφος του πολυωνύμου $P(\lambda)$.

4. *Αν $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ μια θεμελιώδης λύση του $P(D)$ (δηλ. $P(D)v = \delta$), τότε θέτοντας $u = v * g$, έχουμε*
$$P(D)u = P(D)(v * g) = (P(D)v) * g = \delta * g = g \tag{1.72}$$
και άρα η $v * g$ είναι λύση υπό την κλασική έννοια.

$\boxed{\textbf{Παραδείγματα}}$ **1.5.1.** *Έστω $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ και $P(D) = \partial^\alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ με*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, 0, 0, \dots, 0).$$

Τότε, η

$$v := \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{x^{\alpha_i - 1}}{(\alpha_i - 1)!}\right) H(x_1) \dots H(x_m) \otimes \delta(x_{m+1}, \dots, x_n)$$

είναι μια θεμελιώδης λύση του τελεστή $P(D) = \partial^\alpha$. *Αυτό έπεται εύκολα από το οτι*

$$\delta(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \delta(x_{m+1}) \otimes \ldots \otimes \delta(x_n),$$

το οτι $\partial_i H(x_i) = \delta(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, m$ *και τη σχέση* (1.43). *Η γενική λύση του προβλήματος είναι της μορφής*

$$V = v + w,$$

όπου

$$w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\alpha_i - 1} x_i^j u_{i,j}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

με $u_{ij} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ *τυχούσες, αφού* $P(D)w = \partial^\alpha w = 0$.

1.5.2 Η Εξίσωση του Poisson

Ορισμός 1.5.3. *Μια συνάρτηση* $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *λέγεται ακτινικά συμμετρική αν εξαρτάται μόνο από το μέτρο* $|x|$, *δηλ.* $u(x) = g(|x|)$.

Ορισμός 1.5.4. *Έστω* D *ένα χωρίο στον* $\mathbb{R}^n$ *με* C^1 *σύνορο. Ο τελεστής*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} =\equiv \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \ldots + \partial_n^2 u,$$

όπου $u \in C^2(D)$, *ονομάζεται τελεστής του Laplace στο* D.

Ορισμός 1.5.5. *Έστω* D *ένα χωρίο στον* $\mathbb{R}^n$ *με* C^1 *σύνορο. Η* $u \in C^2(D)$, *λέγεται αρμονική στο* D *αν* $\Delta u = 0$.

Παρατηρήσεις 1.5.3. 1. *Οι ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις στο* $\mathbb{B}_n(0, a) \setminus \{0\}$, $a > 0$, *οι οποίες είναι και αρμονικές είναι οι*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{c}{|x|^{n-2}} + c', & n \geq 3 \\ \\ c \log(|x|) + c', & n = 2 \end{cases}$$

Πράγματι, έστω $u : \mathbb{B}_n(0, a) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *ακτινικά συμμετρική, δηλ.* $\exists\ f : (0, a) \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $u(x) = f(|x|) \overset{|x|=r}{=} f(r)$. *Τότε,*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial (f(r))}{\partial x_i} &= \frac{\partial (f(|x|))}{\partial x_i} = \frac{\partial [f((x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2})]}{\partial x_i} \\
&\overset{\text{Κ.Α.}}{=} f'(|x|) \cdot \frac{\partial (|x|)}{\partial x_i} = f'(r) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_i (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{-1/2} \\
&= \frac{f'(r)}{r} \cdot x_i \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f'(r)}{r} \cdot x_i \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{f'(r)}{r} \right] \cdot x_i + \frac{f'(r)}{r} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_i} \\
&\overset{\substack{\text{όπως} \\ \text{πρίν}}}{=} \frac{(f'(r)/r)'}{r} - x_i \cdot x_i + \frac{f'(r)}{r} = \frac{f''(r) r - f'(r)}{r^3} \cdot x_i^2 + \frac{f'(r)}{r}
\end{aligned}$$

Άρα, $\forall x \in \mathbb{B}_n(0,a) \setminus \{0\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Delta u)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3} \cdot x_i^2 + \frac{f'(r)}{r} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3} \cdot x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + n\frac{f'(r)}{r} \\
&= \frac{f''(r)r - f'(r)}{r^3} r^2 + n\frac{f'(r)}{r} \\
&= f''(r) - \frac{f'(r)}{r} + n\frac{f'(r)}{r} \\
&= f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = f''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} f'(|x|).
\end{aligned}$$

Αφού η u είναι αρμονική, έπεται οτι $(\Delta u)(x) = 0$, δηλ.

$$f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = 0, \quad r = |x| \in (0,a).$$

Λύνοντας την πιο πάνω Διαφορική Εξίσωση δευτέρου βαθμού έχουμε

$$\begin{aligned}
f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) &= 0 \quad \Leftrightarrow r^{n-1} f''(r) = r^{n-1} \frac{n-1}{r} f'(r) \\
\Leftrightarrow r^{n-1} f''(r) - r^n (n-1) f'(r) &= 0 \\
\Leftrightarrow (r^{n-1} f'(r))' &= 0 \\
\Leftrightarrow r^{n-1} f'(r) &= c_1, \ \forall r \in (0,a) \\
\Leftrightarrow f'(r) &= r^{1-n} c_1, \ \forall r \in (0,a) \\
\Leftrightarrow f(r) &= \begin{cases} \frac{c_2}{r^{n-2}} + c_3, & n \geq 3 \\ c_2 \log(r) + c_3, & n = 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{c_2}{|x|^{n-2}} + c_3, & n \geq 3 \\ c_2 \log(|x|) + c_3, & n = 2 \end{cases} \qquad (1.73)
\end{aligned}$$

2. *Το πιο πάνω μας λέει πως σε πολικές συντεταγμένες, δηλ. $x = r\theta$, η Λαπλασιανή δρά πάνω σε C^∞ συναρτήσεις ως εξής:*

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r$$

ή γενικότερα

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\mathbb{S}},$$

όπου $\Delta_{\mathbb{S}} =$ div(grad) $=$ο τελεστής Laplace-Beltrami στην $\mathbb{S}_{n-1}(0,1)$.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια θεμελιώδη λύση για την εξίσωση του Poisson:$\Delta u = f$. Ψάχνουμε δηλ. μια $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\Delta v = \delta,$$

αφού τότε θέτοντας $u = v * f$, έχουμε

$$\Delta u = \Delta(v * f) = (\Delta v) * f = \delta * f = f.$$

Έστω $n > 2$. Το αποτέλεσμα (1.73) μας λέει ουσιαστικά πως πρέπει να αναζητήσουμε λύση της μορφής $c|x|^{2-n}$. Η συνάρτηση $x \mapsto |x|^{2-n}$ ανήκει στον $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ και άρα επάγει μια κατανομή. Τότε, για $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ έχουμε οτι $\Delta|x|^{2-n} = 0$, δηλ. $\operatorname{supp}(\Delta|x|^{2-n}) = \{0\}$. Έτσι, από το Θέωρημα (;;) έχουμε οτι

$$\Delta|x|^{2-n} = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

όπου $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \geq 0$ με το άθροισμα να είναι πεπερασμένο. Η συνάρτηση $x \mapsto |x|^{2-n}$ είναι ομογενής βαθμού $2-n$ και άρα η $\Delta|x|^{2-n}$ είναι ομογενής βαθμού $-n$. Έτσι,

$$\sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \delta = \sum_{\alpha \geq 0} t^{n+(-n-|\alpha|)} c_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

ή

$$\sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha \partial^\alpha \delta - \sum_{\alpha \geq 0} t^{-|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha \delta = 0,$$

για $t > 0$. Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά το πιο πάνω με $\phi(x)\frac{x^\alpha}{\alpha!}$, όπου $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n$ με $\phi = 1$ σε μια περιοχή του $x = 0$ παίρνουμε οτι $c_\alpha = 0$, για $\alpha > 0$. Έτσι,

$$\Delta|x|^{2-n} = c\delta,$$

όπου c σταθερά. Θα προσδιορίσουμε τη σταθερά αυτή. Έστω $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n$ με $\psi = 1$ σε μια περιοχή του $x = 0$. Τότε $\psi(|x|) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε

$$\langle \Delta|x|^{2-n}, \psi\rangle = \langle c\delta, \psi\rangle = c\langle \delta, \psi\rangle = c \cdot 1 = c.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
c &= \langle \Delta|x|^{2-n}, \psi\rangle = \langle |x|^{2-n}, \Delta\psi(|x|)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2-n} \Delta\psi(|x|)\, dx \\
&= \int_{r=0}^{\infty} \left(\int_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} |ry|^{2-n} \Delta\psi(|ry|) d\sigma(y) \right) r^{n-1} dr \\
&= \int_{r=0}^{\infty} \Delta(r) \left(\int_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} r^{2-n} d\sigma(y) \right) r^{n-1} dr \\
&= \text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{r=0}^{\infty} \Delta(r) r^{2-n} r^{n-1} dr \\
&= \text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{r=0}^{\infty} \left(\partial_r^2 \psi(r) + \frac{n-1}{r} \partial_r \psi(r) \right) r^{2-n} r^{n-1} dr \\
&= \text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_{r=0}^{\infty} r \left(\partial_r^2 \psi(r) + \frac{n-1}{r} \partial_r \psi(r) \right) dr \\
&= \text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1})(2-n),
\end{aligned}$$

όπου

$$\text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Συνεπώς,

$$\Delta|x|^{2-n} = \text{Εμβ.}(\mathbb{S}^{n-1})(2-n)\delta = \frac{(2-n)2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta = -\frac{(n-2)2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\delta.$$

Θέτοντας λοιπόν

$$v := -\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\pi^{n/2}}|x|^{2-n} = -\frac{\Gamma(n/2)}{(n-2)2\pi^{n/2}|x|^{n-2}} \tag{1.74}$$

και για $f = 0$, έχουμε οτι

$$\Delta v = \delta$$

και άρα η v είναι μια θεμελιώδης λύση του $\Delta u = 0$. Για τη λύση του αντίστοιχου μη-ομογενούς προβλήματος $\Delta u = f$, μια λύση είναι η $v * f$, όπως είδαμε πιο πάνω.

Παρατηρήσεις 1.5.4. *1. Για $n = 2$, η (1.74) γίνεται*

$$v = -\frac{1}{2\pi}\log(|x|).$$

Βέβαια, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Για $n = 3$, η (1.74) γίνεται

$$v = -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

Βέβαια, $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.
Ας δούμε μια άμεση απόδειξη για το ότι η $v := -\frac{1}{4\pi|x|}$ είναι θεμελιώσης λύση του προβλήματος $\Delta u = g$ στον $\mathbb{R}^3$. Θα δείξουμε οτι $\Delta v = \delta$. Έστω λοιπόν $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle \Delta v, \phi\rangle &= \langle v, \Delta\phi\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} v(\boldsymbol{\xi})\Delta\phi(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\Delta\phi(x_1,x_2,x_3)\, dx_1x_2x_3 \\
&= -\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty}\frac{1}{4\pi r}\Delta\phi(r,\varphi,\theta)r^2\sin\theta\, \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\varphi \\
&= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}\int_{r\geq\epsilon}\frac{1}{4\pi r}\Delta\phi r^2\, dr\, dS_{\theta,\phi},
\end{aligned} \tag{1.75}$$

όπου $dS_{\theta,\phi} = \cos\theta\sin\varphi d\theta\, d\varphi$. Αλλά, με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε

$$\int_{r\geq\epsilon}\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\phi r^2\, dr = \int_{r\geq\epsilon}\frac{1}{4\pi r}\Delta\phi r^2\, dr + \left[r^2\frac{1}{4\pi r}\partial_r\phi\right]_{r=\epsilon} - \left[r^2\phi\partial_r\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right]_{r=\epsilon}. \tag{1.76}$$

Όμως, για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ έχουμε οτι $\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = 0$ και η (1.76) γίνεται

$$\int_{r\geq\epsilon}\frac{1}{4\pi r}\Delta\phi r^2\, dr = -\left[r^2\frac{1}{4\pi r}\partial_r\phi\right]_{r=\epsilon} + \left[r^2\phi\partial_r\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right]_{r=\epsilon}. \tag{1.77}$$

[Ουσιαστικά εφαρμόσαμε το Θεώρημα του Stokes]

Από τις (1.75) και (1.77) έχουμε

$$\langle \Delta v, \phi\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}\int_{r=\epsilon}\frac{1}{4\pi r}\partial_r\phi r^2 dS_{\theta,\phi} - \int\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]}\int\limits_{r\geq\epsilon}\phi\partial_r\left(\frac{1}{4\pi r}\right)r^2 dS_{\theta,\phi}\right]. \tag{1.78}$$

Αφού η $\partial_r \phi$ είναι φραγμένη, ο πρώτος όρος στην πιο πάνω σχέση είναι =0. Επίσης, ο δεύτερος όρος γράφεται:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \to 0} \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \int_{r \geq \epsilon} \frac{1}{4\pi r^2} \phi(r,\theta,\phi) r^2 d\theta\, d\varphi\, dr \\
= & \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \phi(0) \frac{1}{4\pi} d\theta\, d\phi + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \frac{1}{4\pi} (\phi(\epsilon,\theta,\phi) - \phi(0)) d\theta\, d\varphi \\
= & \phi(0) + 0 = \phi(0),
\end{aligned} \tag{1.79}$$

λόγω της συνέχειας της ϕ στο 0. Από τις (1.75) και (1.79) έπεται το ζητούμενο.

1.5.3 Η εξίσωση της θερμότητας

Ο τελεστής της Θερμότητας είναι ο $P(D) = \partial_t - \Delta$, όπου Δ η Λαπλασιανή στον $\mathbb{R}^n$. Εδώ οι συντεταγμένες είναι $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \equiv X$. Ως γνωστόν, από τη Θεωρία των ΜΔΕ, η συνάρτηση

$$v(x,t) = H(t) \frac{1}{2^n} \frac{e^{-|x|^2/(4t)}}{(\pi t)^{\frac{n}{2}}}$$

λύνει το πρόβλημα $P(D)v(x,t) = 0$, δηλ. $\partial_t v(x,t) - \Delta v(x,t) = 0$ για $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Θα δείξουμε οτι η v είναι μια θεμελιώδης λύση του προβλήματος, δηλ. οτι $P(D)v = \delta$. Η ανωμαλία παρουσιάζεται στο $t = 0$ και γιαυτό στο πιο κάτω ολοκλήρωμα λαμβάνουμε το συγκεκριμένο όριο καθώς $\epsilon \to 0+$. Έχουμε για κάθε $\phi \in \mathcal{D}(X)$:

$$\begin{aligned}
\langle P(D)v, \phi \rangle &= \langle (\partial_t - \Delta)v, \phi \rangle \\
&= -\langle v, (\partial_t + \Delta)\phi \rangle \\
&= -\iint_X v(x,t)(\partial_t \phi + \Delta \phi)\, dx\, dt
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Αλλά η $v \in L^1_{loc}(X)$ και η τελευταία σχέση γίνεται:

$$-\lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{t \geq \epsilon} v(x,t)(\partial_t \phi + \Delta \phi)\, dx\, dt. \tag{1.81}$$

Εφόσον $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ και $P(D)v(x,t) = 0$ για $t > 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$ σταθεροποιημένο), με ολοκλήρωση κατα μέρη παίρνουμε :

$$\begin{aligned}
0 = \int_{t \geq \epsilon} (\partial_t v(x,t) + \Delta v(x,t))\phi\, dt &= \int_{t \geq \epsilon} P(D)v(x,t)\phi\, dt \\
&= [v(x,t)\phi(x,t)]_{t=\epsilon} - \int_{t \geq \epsilon} v(x,t) P(D)\phi\, dt
\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{t \geq \epsilon} v(x,t) P(D)\phi\, dt = [v(x,t)\phi(x,t)]_{t=\epsilon} = v(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon), \tag{1.82}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από τις (1.80) και (1.82) έχουμε οτι

$$\langle P(D)v, \phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} v(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon)\, dx.$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, θεωρούμε το μετασχηματισμό $dx = 2\epsilon^{\frac{1}{2}} y$, οπόταν

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon)\, dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} v(2\epsilon^{\frac{1}{2}} y, \epsilon) e^{-|y|^2}\, dy$$

και άρα

$$\begin{aligned}
\langle P(D)v, \phi\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n} v(x,\epsilon)\phi(x,\epsilon)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(2\epsilon^{\frac{1}{2}}y,\epsilon)e^{-|y|^2}\,dy \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\epsilon\to 0+}\phi(2\epsilon^{\frac{1}{2}}y,\epsilon)e^{-|y|^2}\,dy \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(0,0)e^{-|y|^2}\,dy \\
&= \phi(0,0)\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|y|^2}\,dy \\
&= \phi(0,0)
\end{aligned}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

[Η εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος οφείλεται στο ότι η συνάρτηση ϕ είναι φραγμένη και η $y \mapsto e^{-|y|^2}$ ανήκει στον $L^1(X)$. Το αποτέλεσμα έπεται τότε από το ΘΚΣ] ■

Κεφάλαιο 2

Παράρτημα

Θεώρημα 2.0.1. *[Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών στο Ολοκλήρωμα στο $\mathbb{R}^n$] Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}^n(U)$ μια C^1 και 1-1 συνάρτηση ($\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$) για την οποία ισχύει $\det(J(\phi)_P) \neq 0\ \forall p \in U$. Τότε, για κάθε συνεχή συνάρτηση f με πραγματικές τιμές και τέτοια ώστε $\operatorname{supp}(f) \subset \phi(U)$, και $\operatorname{supp}(f)$ συμπαγές, ισχύει*

$$\int_U f(\phi(\mathbf{x}))|\det(J(\phi)(\mathbf{x}))|d\mathbf{x} = \int_{\phi(U)} f(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}. \tag{2.1}$$

Θεώρημα 2.0.2. *[Θεώρημα Fubini-Tonelli] Έστωσαν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι $\sigma-$ πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ μια $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}-$μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

1. *Αν $f(x, y) \geq 0,\ \forall(x, y) \in X \times Y,\ \phi : X \to \mathbb{C}$ με $\phi(x) := \int_Y f(x, y)d\nu(y)$ και $\psi : Y \to \mathbb{C}$ με $\psi(y) := \int_X f(x, y)d\mu(x)$, τότε η ϕ είναι $\mathcal{A}-$ μετρήσιμη, η ψ είναι $\mathcal{B}-$μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_X \phi(x)\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y \psi(y)\, d\nu(y),$$

δηλ.

$$\begin{aligned} \int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) &= \iint_{X\times Y} f(x, y)\, d(\mu \times \nu)(x, y) \\ &= \int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y). \end{aligned}$$

2. *Αν κάποιο από τα $\int_Y \int_X |f(x, y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y)$, $\int_X \int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x)$ είναι πεπερασμένο, τότε και το άλλο είναι πεπερασμένο και ισχύει $f \in L^1(\mu \times \nu)$.*

Το Θ. Tonelli λέει οτι αν κάποιο από τα $\int_Y \int_X |f(x, y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ και $\int_X \int_Y |f(x, y)|\, d\nu(y)\, d\mu(x)$ είναι πεπερασμένο, τότε και το άλλο είναι πεπερασμένο και ισχύει $f \in L^1(\mu \times \nu)$.
Το Θ. Fubinu λέει οτι αν $f \in L^1(\mu \times \nu)$, τότε τα ολοκληρώματα
$\int_Y \int_X f(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$ και $\int_X \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)\, d\mu(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα.

Θεώρημα 2.0.3. [*Τύπος πολικών συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^n$*]

$$\int_{a<|x|<b} f(x)dx = \int_{r=a}^{b} \left(\int_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} f(ry)d\sigma(y) \right) r^{n-1}dr \quad (a < b).$$

Βιβλιογραφία

[1] Leon Ehrenpreis - *Solution of Some Problems of Division,* American Journal of Mathematics, 7(4):883-903, Οκτ. 1954.

[2] G. Friedlander and M. Joshi. - *The Theory of Distributions,* Second Edition, 1998 Cambridge University Press

[3] Lars Hörmander - *On the division of distributions by polynomials,* ARKIV FÖR MATEMATIK Band 3 nr 53, 1958

[4] Lars Hörmander - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II: Differential Operators with Constant Coefficients,* Springer-Verlag, Επανέκδοση της έκδοσης του 1983, Βερολίνο, 2004

[5] Bernard Malgrange - *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution,* Annales de l'Institut Fourier, 6:271-355, 1956. (σελ. 4 και 5).