
Δυναμοσειρές

Ασκήσεις

<http://ioakimioannis.com>

ΙΩΑΚΕΙΜ Ι. ΙΩΑΝΝΗΣ

Ασκήσεις

① Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k & \text{(iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n \\ \text{(ii)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k & \text{(v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ \text{(iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n & \text{(vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \end{array}$$

Λύση

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k, \quad c_k = \frac{3^{k+1}}{k} x^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει. Είναι (για x σταθεροποιημένο)

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \left| \frac{\frac{3^{k+2}}{k+1} x^{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k} x^k} \right| = \frac{3k}{k+1} \cdot |x| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underbrace{3 \cdot |x|}_{\rho}$$

και

$$\rho < 1 \iff 3 \cdot |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{3} \iff x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

και άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η $R = \frac{1}{3}$. Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για $x = -\frac{1}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει (από το Κριτήριο

Εναλλάσσουσας Σειράς¹) και για $x = \frac{1}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει²

Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{(ii)} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x - (-5))^k, \quad c_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = -5$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει. Είναι (για x σταθεροποιημένο)

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \left| \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} (x+5)^{k+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k} \right| = \frac{3}{4} \cdot |x+5| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \underbrace{3 \cdot |x|}_{\rho}$$

¹Μια σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ λέγεται εναλλάσσουσα. Το κριτήριο λέει ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n \geq 0}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα και $\lim_n a_n = 0$, τότε η αντίστοιχη εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει.

²Ισχύει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

και

$$\begin{aligned} \rho < 1 &\iff \frac{3}{4} \cdot |x+5| < 1 \iff |x+5| < \frac{4}{3} \iff -\frac{4}{3} < x+5 < \frac{4}{3} \\ &\iff -5 - \frac{4}{3} < x < \frac{4}{3} - 5 \iff -\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3} \\ &\iff x \in \left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right) \end{aligned}$$

και αρα η ακτινα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η $R = \frac{4}{3}$. Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για $x = -\frac{19}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k$ η οποία αποκλίνει και για $x = -\frac{19}{3}$

η σειρά που προκύπτει είναι η $\sum_{k=1}^{+\infty} 1$ η οποία επίσης αποκλίνει. Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$ Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = -3$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Λόγου.

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} (n+1)}{4^{n+1}} (x+3)^{n+1}}{\frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{-(n+1)(x+3)}{4n} \right| \\ &= |x+3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} |x+3|. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $L < 1$, δηλ. $\frac{1}{4}|x+3| < 1 \iff |x+3| < 4$. Άρα, η ακτινα σύγκλισης $R = 4$. Για όλα τα x τέτοια ώστε $|x+3| > 4$, η σειρά αποκλίνει. Τώρα, $|x+3| < 4 \iff -4 < x+3 < 4 \iff -7 < x < 1$, επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-7, 1)$. Ακολούθως, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία $x = -7, 1$.

$$x = 1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n, \quad x = -7: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

η οποία αποκλίνει.

η οποία αποκλίνει.

Άρα, τελικά, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-7, 1)$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 2$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει:

$$\begin{aligned} L &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1} (4x-8)^{n+1}}{\frac{2^n}{n} (4x-8)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2(4x-8)n}{4n+1} \right| \\ &= 2|4x-8| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2|4x-8|. \end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $L < 1$, δηλ. $|x-2| > \frac{1}{8}$. Επομένως, η ακτινα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{8}$. Τώρα, $|x-2| <$

$\frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < x - 2 < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$, επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$. Ακολουθώντας, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία $x = \frac{15}{8}, \frac{17}{8}$.

$x = \frac{15}{8} :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{15}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

$x = \frac{17}{8} :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{17}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^n}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|x| < 1$, δηλ. $x \in (-1, 1)$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $|x| > 1$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για $x = \pm 1$:

$x = 1 :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

$x = -1 :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$.

(vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n^2}} = \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^2 < 1$, δηλ. $x \in (-1, 1)$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $x^2 > 1$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για $x = \pm 1$:

$x = 1 :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

$x = -1 :$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

② Υπολογίστε τα πιο κάτω:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \qquad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$$

Λύση

(i) Θυμόμαστε ότι

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{και (άρρα)} \quad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \log(1+x) - \log(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \right) + \\ &\quad + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots \right) \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right) \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} [\log(1+x) - \log(1-x)]. \end{aligned}$$

Για $x = \frac{1}{2}$ ο πιο πάνω τύπος μας δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &= \frac{1}{2} \left[\log\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \log\left(\frac{3/2}{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \log 3 = \log \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(ii) Θυμόμαστε ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{και (άρρα)} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Έτσι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Για $x = 1$, ο πιο πάνω τύπος μας δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}.$$