

Όριο/Συνέχεια συνάρτησης

1

(α) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x - 1$ και $x_0 = 2, L = 7$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχείρημά μας να ισχύει για <i>κάθε</i> $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < x - 2 < \delta$ να ισχύει $ f(x) - 7 < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που φάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$ f(x) - 7 = 4x - 1 - 7 = 4(x - 2) = 4 x - 2 $ Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x - 2 < \delta$, συνεπώς, αρκεί $ f(x) - 7 < 4\delta$ Επίσης, θέλουμε $ f(x) - 7 < \varepsilon$ και άρα $\varepsilon = 4\delta$ ή, ισοδύναμα, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Αφού $\varepsilon > 0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ , αυτό θα είναι > 0 .	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Για $\delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x - 2 < \delta = \frac{\varepsilon}{4}$, έχουμε $ f(x) - 7 = 4 x - 2 < \varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ , επαληθεύουμε τον ορισμό
Άρα το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 7	Συμπέρασμα

(β) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x - 4) = -7$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - 4$ και $x_0 = -3, L = -7$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχείρημά μας να ισχύει για <i>κάθε</i> $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < x - (-3) < \delta$ να ισχύει $ f(x) - (-7) < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που φάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$ f(x) - (-7) = x - 4 + 7 = x + 3 $ Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x + 3 < \delta$, συνεπώς, αρκεί $ f(x) - (-7) < \delta$ Επίσης, θέλουμε $ f(x) - (-7) < \varepsilon$ και άρα $\varepsilon = \delta$. Αφού $\varepsilon > 0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ , αυτό θα είναι > 0 .	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Για $\delta = \varepsilon > 0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x + 3 < \delta = \varepsilon$, έχουμε $ f(x) - (-7) = x + 3 < \varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ , επαληθεύουμε τον ορισμό

Άρα το $\lim_{x \rightarrow -3}(x - 4)$ υπάρχει και είναι ίσο με -7	Συμπέρασμα
---	------------

(γ) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι $\lim_{x \rightarrow 3}(5) = 5$.
 Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5$ και $x_0 = 3, L = 5$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχειρήματά μας να ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < x - 3 < \delta$ να ισχύει $ f(x) - 5 < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που φάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$ f(x) - 5 = 5 - 5 = 0$ Αρα ότι $\delta > 0$ και να πάρουμε (αφού η συνάρτηση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x) έχουμε το ζητούμενο.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Άρα το $\lim_{x \rightarrow 3}(5)$ υπάρχει και είναι ίσο με 5	Συμπέρασμα

(δ) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι $\lim_{x \rightarrow -4}(-5x + 6) = 26$.
 Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -5x + 6$ και $x_0 = -4, L = 26$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχειρήματά μας να ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < x + 4 < \delta$ να ισχύει $ f(x) - 26 < \varepsilon$	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που φάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$ f(x) - 26 = -5x + 6 - 26 = -5x - 20 = 5 x + 4 $ Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $0 < x + 4 < \delta$, συνεπώς, αρκεί $ f(x) - 26 < 5\delta$ Επίσης, θέλουμε $ f(x) - 26 < \varepsilon$ και άρα $\varepsilon = 5\delta$ ή, ισοδύναμα, $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$. Αφού $\varepsilon > 0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ , αυτό θα είναι > 0 .	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
$ f(x) - 26 = -5x + 6 - 26 = -5x - 20 = 5 x + 4 < \varepsilon$ Αρα ότι $\delta > 0$ και να πάρουμε (αφού η συνάρτηση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x) έχουμε το ζητούμενο.	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
Για $\delta = \varepsilon > 0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x + 4 < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$, έχουμε $ f(x) - 26 = 5 x + 4 < \varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ , επαληθεύουμε τον ορισμό
Άρα το $\lim_{x \rightarrow -4}(-5x + 6)$ υπάρχει και είναι ίσο με 26	Συμπέρασμα

(ε) Θα αποδείξουμε με τον ορισμό (του ορίου) ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2.$$

Εδώ, η συνάρτηση είναι η $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ και $x_0 = 1$, $L = 2$.

Έστω $\varepsilon > 0$.	Ξεκινάμε με ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$ αφού ο ορισμός του ορίου απαιτεί το επιχειρήματά μας να ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$
Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ τέτοια ώστε $0 < x - 1 < \delta$ να ισχύει $ f(x) - 2 < \varepsilon$.	Παράθεση επιχειρήματος. Το δ που φάχνουμε πρέπει να εξαρτάται από το (σταθεροποιημένο πλέον) ε
$ f(x) - 2 = \left \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right = \left \frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{x - 1} \right $ $= \left \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right = \left \frac{(x - 1)^2}{x - 1} \right = x - 1 $ <p>Αλλά αυτό θα πρέπει να ισχύει για κάθε $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $0 < x - 1 < \delta$, συνεπώς, θα πρέπει $f(x) - 2 < \delta$</p> <p>Επίσης, θέλουμε $f(x) - 2 < \varepsilon$ και άρα $\varepsilon = \delta$ ή, ισοδύναμα, $\delta = \varepsilon$. Αφού $\varepsilon > 0$, από τον τρόπο που ορίσαμε το δ, αυτό θα είναι > 0.</p>	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
$ f(x) - 2 = x - 1 $ <p>Άρα ότι $\delta > 0$ και να πάρουμε (αφού η συνάρτηση δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x) έχουμε το ζητούμενο.</p>	Ανάλυση επιχειρήματος. Ξεκινάμε 'ανάποδα', δηλ. από το αποτέλεσμα για να βρούμε το δ αυτό.
<p>Για $\delta = \varepsilon > 0$ και για κάθε x τέτοιο ώστε $0 < x - 1 < \delta = \frac{\varepsilon}{5}$, έχουμε</p> $ f(x) - L = \left \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right = x - 1 < \varepsilon$	Αφού βρήκαμε το δ , επαληθεύουμε τον ορισμό
Άρα το $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right)$ υπάρχει και είναι ίσο με 2	Συμπέρασμα

(στ) Δουλεύοντας όπως ακριβώς και στην προηγούμενη άσκηση δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = -8.$$