Θεωρούνται γνωστά:

(i) Έννοια ιδιοτιμής/ιδιόχωρων
(ii) Μέθοδος απαλοιφής Gauss-Jordan
(iii) Ιδιότητες Οριζουσών
(iv) Διαγωνοποίηση πίνακα
(v) Εύρεση αντίστροφου πίνακα με χρήση απαλοιφής Gauss-Jordan

Να εξεταστεί αν ο πιο κάτω πίνακας A διαγωνοποιείται και στην περίπτωση που αυτό είναι δυνατό, να διαγωνοποιηθεί:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2

Λύση

$$A - \lambda I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 5 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

και

$$\det(A - \lambda I_{3\times 3}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 5 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{C_2\to C_2-C_1}{\iff} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 5 & -\lambda & -1 \\ -1 & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{R_2\to R_2+R_3}{\iff} \lambda \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -\lambda \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{\text{ανάπτυγμα ως προς 2η στήλη}}{\iff} -\lambda \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0 \iff \boxed{\lambda(\lambda-4)(\lambda-2) = 0}$$

και αρα, αφού ο (3×3) πίνακας A έχει τρείς διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, είναι διαγωνοποιήσιμος. Θα βρούμε τους αντίστοιχους ιδιόχωρους:

Για τη $\lambda_1 = 0$, το αντίστοιχο σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Εκτελούμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και έτσι, έχουμε 1 ελεύθερη μεταβλητή (την z), αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής $(x, y, z) = t(0, -1, 1)$, $t \in \mathbb{R}_*$. Δηλ. ο ιδιόχωρος $E(\lambda_1)$ είναι το σύνολο $\text{span}\{(0, -1, 1)\}$.

Για τη $\lambda_2 = 2$, το αντίστοιχο σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Εκτελούμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και έτσι, έχουμε 1 ελεύθερη μεταβλητή (την z), αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής $(x, y, z) = t(2, 3, 1)$, $t \in \mathbb{R}_*$. Δηλ. ο ιδιόχωρος $E(\lambda_2)$ είναι το σύνολο $\text{span}\{(2, 3, 1)\}$.

Για τη $\lambda_3 = 4$, το αντίστοιχο σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 5 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Εκτελούμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -5 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και έτσι, έχουμε 1 ελεύθερη μεταβλητή (την y), αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι της μορφής $(x, y, z) = t(1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}_*$. Δηλ. ο ιδιόχωρος $E(\lambda_3)$ είναι το σύνολο $\text{span}\{(1, 1, 0)\}$.
Τότε, ο πίνακας A γράφεται ως $A = PQP^{-1}$, όπου

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Μένει να βρούμε τον P^{-1} : μέσω γραμμοπράξεων (είναι αναμενόμενο το ότι ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, αφού οι στήλες/γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα)

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

δηλ.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$