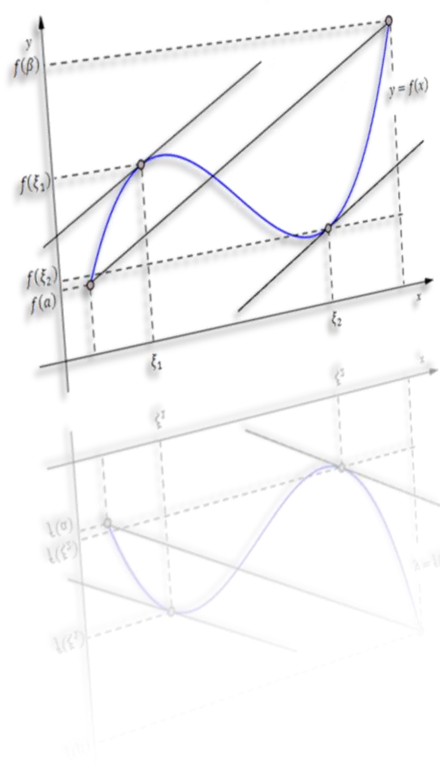
Προετοιμασία για τις

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

• Κεφάλαιο I •

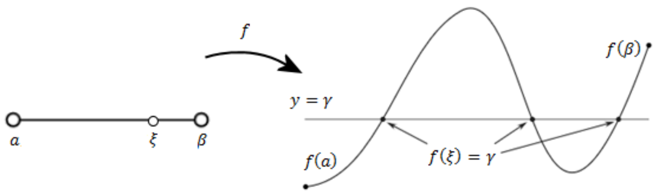
Ειδικά **Θεωρήματα** του Διαφορικού Λογισμού



Υπενθυμίσεις από την προηγούμενη τάξη

Θεώρημα [Ενδιάμεσης Τιμής]

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε, αν $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και γ ένας οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\gamma$.



Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει ότι μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές της μεταξύ των αριθμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

Πόρισμα [Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε $f([\alpha,\beta])=[m,M]$ όπου m και M πραγματικοί αριθμοί.

Πόρισμα [Θεώρημα Bolzano]

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha,\beta]$. Τότε, αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

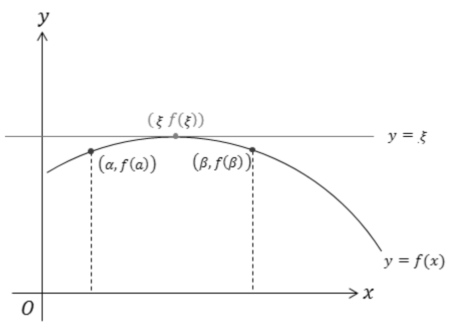
Παρατηρήσεις

① Το πιο πάνω Πόρισμα μας λέει ότι μια *συνεχής* συνάρτηση σε κλειστό διάστημα με αντίθετες τιμές στα άκρα του διαστήματος αυτού, έχει μια (τουλάχιστον) ρίζα.

② Το Θεώρημα δεν προσδιορίζει ποιά ακριβώς θα είναι η τιμή του ξ που ικανοποιεί το αποτέλεσμά του.

Θεώρημα [Rolle]

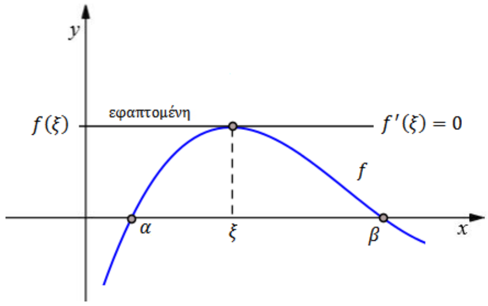
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα[1] $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (α,β) και τέτοια ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Τότε, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.



[1] Θυμόμαστε ότι για να ορίζεται **διάστημα** (α,β), πρέπει $\alpha<\beta$. Αν $\alpha=\beta$, τότε το διάστημα είναι εκφυλίζεται σε μονοσύνολο.

Παρατηρήσεις

① Το πιο πάνω Θεώρημα με τις υποθέσεις που το συνοδεύουν, μας λέει ότι η παράγωγος της συνάρτησης στο (α,β) μηδενίζεται μια τουλάχιστον φορά, δηλ. υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.



② Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Rolle είναι ότι μεταξύ 2 ριζών της εξίσωσης $f=0$, υπάρχει **τουλάχιστον μια** ρίζα της εξίσωσης $f'=0$.

③ Το θεώρημα δεν μας λέει όμως σε πόσα σημεία στο γράφημα της f η εφαπτομένη είναι μηδέν, ισοδύναμα, πόσες είναι **οι λύσεις της εξίσωσης $f'=0$**.

④ Το Θεώρημα του Rolle παύει να ισχύει όταν αφαιρέσουμε την υπόθεση της συνέχειας. Για παράδειγμα, αν $f(x)=\varepsilon\varphi x$, ενώ $f(\pi)=f(0)=0$, δεν υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$, αφού $f'(x)=\tau\varepsilon\mu^2 x$ και η εξίσωση $\tau\varepsilon\mu^2\xi=0$ δεν έχει λύση. Το γεγονός αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα αφού η f δεν είναι συνεχής στο $[0,\pi]$.

Θεώρημα [Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού]

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (α,β). Τότε, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ [Δεν απαιτείται για τις Παγκύπριες]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με τύπο[2]

$$h(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

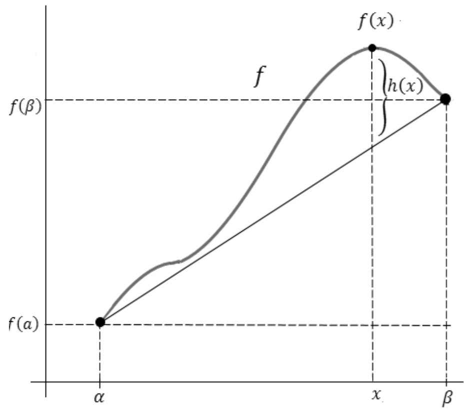
Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ ως το άθροισμα της συνάρτησης f και ενός πολυωνύμου πρώτου βαθμού.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) για τον ίδιο λόγο και μάλιστα

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$h(\beta)=h(\alpha)$$

Έτσι, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $h'(\xi)=0$,



$$\text{δηλ. } f'(\xi)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0, \qquad \text{δηλ. } f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

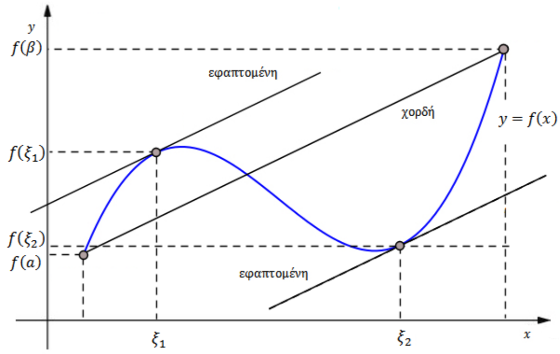
[2] σκεφτείτε ότι η ευθεία που ενώνει τα σημεία $(\alpha,f(\alpha))$ και $(\beta,f(\beta))$ έχει εξίσωση

$$y=f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

Παρατηρήσεις

① Η συνάρτηση h στην απόδειξη του πιο πάνω Θεωρήματος, μετρά κατά κάποιον τρόπο το πόσο απέχει η συνάρτηση f από το να συμπέσει με την συνάρτηση ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$. Δες και παρακάτω, τη *γραμμική προσέγγιση συνάρτησης.*

② Το πιο πάνω Θεώρημα λαμβάνει την ονομασία του από το πηλίκο που εμφανίζεται στον πιο πάνω τύπο, αφού αποτελεί μια *μέση* τιμή. Θυμηθείτε ότι η ποσότητα $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ είναι ο *μέσος ρυθμός μεταβολής* της συνάρτησης f στο (κλειστό) διάστημα $[\alpha, \beta]$ ενώ η τιμή $f'(\xi)$ *ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής στο σημείο με* $x = \xi$. Το ΘΜΤ μας λέει ότι σε κάποιο σημείο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο



ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα. Δηλ. μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων του γραφήματος μιας συνάρτησης συνεχούς σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμης στο $[\alpha, \beta] - \{\alpha, \beta\}$, υπάρχει ένα **τουλάχιστον** σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα 2 αυτά σημεία.

③ Η παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος δεν είναι αναγκαία για την ισχύ του Θεωρήματος. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Στα σημεία $x = \pm 1$ η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη, αλλά στο διάστημα $(-1,1)$ είναι με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. και στο $[-1,1]$ είναι συνεχής.

④ Αν αφαιρέσουμε κάποια από τις 2 συνθήκες στο πιο πάνω Θεώρημα, τότε αυτό παύει να ισχύει (δηλ. δεν ισχύει εν γένει). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, 1] \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο $x = 0$ αλλά είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 0, \forall x \in (0,1)$. Το συμπέρασμα του ΘΜΤ δεν ισχύει:

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -1$$

Η συνάρτηση $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[-1,1]$ αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει. Το συμπέρασμα του ΘΜΤ δεν ισχύει:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

αλλά δεν υπάρχει $x \in [-1,1]$ τέτοιο $f'(x) = 0$, αφού

$$f'(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

⑤ Το Θεώρημα Μέσης Τιμής ισχύει και με ασθενέστερες υποθέσεις:
Αν f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και τέτοια ώστε $\forall x \in (\alpha,\beta)$ το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ υπάρχει (είτε αυτό είναι πεπερασμένο είτε $\pm\infty$), τότε, υπάρχει $c \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(c)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Στην περίπτωση που το ανωτέρω όριο είναι πεπερασμένο, τότε αυτό είναι ίσο με $f'(x)$.

⑥ Μερικές φορές μπορούμε να βρούμε την τιμή του ξ στο ΘΜΤ. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f:[-4,6]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2-x$. Η f είναι συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[-4,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(-4,6)$. Έτσι, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ, δηλ. υπάρχει $\xi \in (-4,6)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(6)-f(-4)}{6-(-4)}=\frac{30-20}{10}=1.$$

Επίσης, $f'(x)=2x-1, \forall x \in \mathbb{R}$. Για να βρούμε την τιμή του ξ λύνουμε την $f'(\xi)=1$, δηλ. $2\xi-1=1$ δηλ. $\xi=1$.

⑦ Όπως είδαμε και πιο πάνω , σε πολλές εφαρμογές, μπορεί να χρειαστεί να εφαρμόσουμε το ΘΜΤ σε διάφορα διαστήματα του Π.Ο. μιας συνάρτησης στα οποία ικανοποιούνται οι υποθέσεις του.

➢ **Εφαρμογή 1**

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή με την κίνησή του να περιγράφεται από την (παραγωγίσιμη) συνάρτηση $s=f(t)$, όπου t ο χρόνος σε second. Αν τις χρονικές στιγμές $t=\alpha$ και $t=\beta$ όπου $\alpha<\beta$, ευρίσκεται στην ίδια θέση, ήτοι $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε από το Θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει μια χρονική στιγμή $t=\xi$ στο χρονικό διάστημα (α,β) για την οποία το σωματίδιο παραμένει ακίνητο, δηλ. $f'(\xi)=0$.

➢ **Εφαρμογή 2**

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2}<\ln 2<1.$$

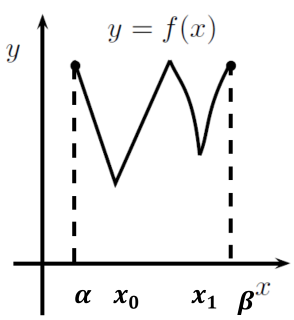
θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x$. Είναι καλά ορισμένη στο διάστημα $[1,2]$, συνεχής σε αυτό και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο $(1,2)$. Έτσι, από το ΘΜΤ, θα υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

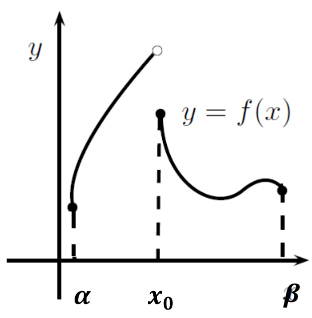
Αλλά, $f'(x)=\frac{1}{x}, \forall x \in [1,2]$ και αρα η πιο πάνω μας δίνει ότι $\ln 2=\frac{1}{\xi}$. Τώρα, αφού $\xi \in (1,2)$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\xi}<1$$

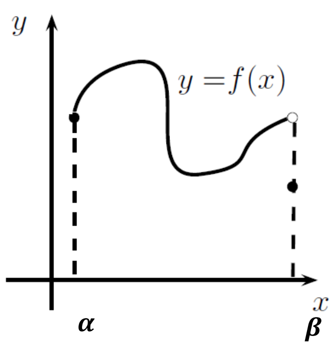
και το συμπέρασμα έπεται.



f μη παραγωγίσιμη σε όλο το (α,β) και αρα το ΘΜΤ δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο $[\alpha,\beta]$



f ασυνεχής στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και αρα το ΘΜΤ δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο $[\alpha,\beta]$



f ασυνεχής στο άκρο β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και αρα το ΘΜΤ δεν μπορεί να εφαρμοστεί στο $[\alpha,\beta]$

Ερωτήσεις κατανόησης-εμπέδωσης

- Ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$;
  ΝΑΙ: Αφού είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, αυτή θα είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό αλλά και παραγωγίσιμη στο (α, β).
- Έστω η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$
  Ισχύει το αποτέλεσμα του ΘΜΤ για τη συνάρτηση αυτή στο διάστημα $[0,1]$;
  Απάντηση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f(0) = 0 = f(1)$. Όμως, το συμπέρασμα του ΘΜΤ δεν ισχύει: δεν υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0$$
  αφού $f'(x) = 1 \neq 0, \forall x \in (0,1)$. Το αποτέλεσμα αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα του Rolle (άρα ούτε και στο ΘΜΤ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$ (παρουσιάζει ασυνέχεια στο $x = 1$).

- Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει ακριβώς n *διακεκριμένες* πραγματικές ρίζες ($n \in \mathbb{N}$), τί συμπεραίνετε για το πλήθος των ριζών της f';
  Απάντηση: έχει τουλάχιστον $n - 1$ πραγματικές ρίζες
  Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι οι ρίζες της είναι οι $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Η υπόθεση αυτή μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τα *διαστήματα* (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \cdots, (x_{n-1}, x_n)$ τα οποία είναι ξένα ανά δύο. Σε κάθε ένα από αυτα τα $n - 1$ το πλήθος διαστήματα, από το ΘΜΤ, η f' θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα και το συμπέρασμα έπεται.

- Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δις-παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει 3 διακεκριμένες ρίζες. Τί συμπεραίνετε για την ύπαρξη ριζών της εξίσωσης $f''(x) = 0$;

  Απάντηση: Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση.
  Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι οι ρίζες της είναι οι $x_1 < x_2 < x_3$. Η υπόθεση αυτή μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τα διαστήματα (x_1, x_2), (x_2, x_3) τα οποία είναι ξένα ανά δύο.
  Αφου $f(x_1) = f(x_2)$ και αφου ικανοποιούνται οι υπόλοιπες συνθήκες του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Ομοίως, υπάρχει $\xi^* \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi^*) = 0$. Από το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\xi, \xi^*]$ για την f', έχουμε ότι υπάρχει $\xi^{**} \in (\xi, \xi^*)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi^{**}) = 0$.

- Έστω f η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2 - |1 - x|$. Εξηγήστε γιατί δεν μπορεί να εφαρμοστεί το ΘΜΤ για τη συνάρτηση αυτή στο διάστημα $[0,2]$. Γιατί δεν μπορεί να υπάρξει αριθμός $\xi \in (0,2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 2$;
  Απάντηση: Κατ'αρχάς είναι
$$f(x) = 2 - |1 - x| = \begin{cases} 2 - (1 - x), & x \ge 1 \\ (1 - x) - 2, & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 + x, & x \ge 1 \\ -x - 1, & x < 1 \end{cases}$$
  και εύκολα δείχνουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R} - \{1\}$ με
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$$
  Έτσι, δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[0,2]$. Δεν μπορεί να υπάρξει αριθμός $\xi \in (0,2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 2$ αφού για κάθε $\xi \in (0,2)$ είτε $f'(\xi) = -1$ είτε $f'(\xi) = 1$ είτε το $f'(\xi)$ δεν ορίζεται.