## 1.5 Δραστηριότητες σελ. 36 - Μονοτονία-Ακρότατα Συνάρτησης (Θεωρήματα)

**Άσκηση 1**

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

**(α)** $f(x) = x^2 - 4x,\ x \in \mathbb{R}$ **(β)** $f(x) = -3x^2 + 9,\ x \in \mathbb{R}$

**(γ)** $f(x) = x^2 - 6x + 9,\ x \in \mathbb{R}$ **(δ)** $f(x) = -x^3 + 12x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

**Λύση**

Τα γραφήματα των συναρτήσεων της άσκησης είναι παραβολές (εκτός του ερωτήματος (δ)), για τις οποίες γνωρίζουμε που λαμβάνουν (ολικά) ακρότατες τιμές. Όμως, θα λύσουμε την άσκηση με χρήση παραγώγου συνάρτησης έτσι ώστε να αντιληφθούμε τη δύναμη του εργαλείου αυτή στη μελέτη μονοτονίας.

**(α)** Το π.ο. της $f$ είναι το $\mathbb{R}$. Σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (x^2 - 4x)' = 2x - 4 = 2(x - 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \iff 2(x-2) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $x = 2$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f'$ εκατέρωθεν του σημείου αυτού: είναι $f'(x) < 0$, $\forall x < 2$ και $f'(x) > 0$, $\forall x > 2$, δηλ. αριστερά του $x = 2$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά του γνησίως αύξουσα.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Έτσι, το σημείο $(2, f(2)) = (2, -4)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού ελαχίστου) του γραφήματος της $f$. Ιδιαίτερα, είναι και ολικό ελάχιστο.

**(β)** Το π.ο. της $f$ είναι το $\mathbb{R}$. Σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (-3x^2 + 9)' = -6x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \iff -6x = 0 \iff x = 0.$$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $x = 0$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f'$ εκατέρωθεν του σημείου αυτού: είναι $f'(x) > 0$, $\forall x < 0$ και $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$, δηλ. αριστερά του $x = 0$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και δεξιά του γνησίως φθίνουσα.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\boxed{0}$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Έτσι, το σημείο $(0, f(0)) = (0, 9)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού μεγίστου) του γραφήματος της $f$. Ιδιαίτερα, είναι και ολικό μέγιστο.

**(γ)** Το π.ο. της $f$ είναι το $\mathbb{R}$. Σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 0)' = 2x - 6 = 2(x - 3), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2(x - 3) = 0 \Longleftrightarrow x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 3.$$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $x = 3$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f'$ εκατέρωθεν του σημείου αυτού: είναι $f'(x) < 0$, $\forall x < 3$ και $f'(x) > 0$, $\forall x > 3$, δηλ. αριστερά του $x = 3$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά του γνησίως αύξουσα.[9]

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Έτσι, το σημείο $(3, f(3)) = (3, 0)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού ελαχίστου) του γραφήματος της $f$. Ιδιαίτερα, είναι και ολικό ελάχιστο.

**(δ)** Το π.ο. της $f$ είναι το $\mathbb{R}$. Σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = (-x^3 + 12x + 1)' = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x - 2)(x + 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 2.$$

Άρα, τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι τα $x = \pm 2$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | $\boxed{0}$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

• για $x < -2$ είναι $f'(x) < 0$ και άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$)

• για $-2 < x < 2$ είναι $f'(x) > 0$ και άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-2, 2)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 2]$)

[9] Σαφώς μπορούμε να συμπεριλάβουμε και το σημείο $x = 3$ στα άκρα των διαστημάτων μονοτονίας

• για $x > 2$ είναι $f'(x) < 0$ και αρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(2, +\infty)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.
Από τα πιο πάνω, έπεται ότι το σημείο $(-2, f(-2)) = (-2, -15)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού ελαχίστου) του γραφήματος της $f$, ενω το σημείο $(2, f(2)) = (2, 17)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού μεγίστου) του γραφήματος της $f$.
Τα σημεία αυτά είναι τοπικά αλλά όχι ολικά ακρότατα για το γράφημα της $f$.

**Άσκηση 2**

Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν ακρότατα:
**(α)** $f(x) = 3x^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}$ **(β)** $f(x) = 2 - x^5,\ x \in \mathbb{R}$

**(γ)** $f(x) = x^3 + x^2 + 2x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

**Λύση**

**(α)** Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (3x^3 + 1)' = 9x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για ενα και μόνο σημείο, στο $x = 0$, δηλ. εκτός από ενα *μεμονωμένο* σημείο. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το π.ο. της και αρα δεν μπορεί να λαμβάνει ακρότατες τιμές.

**(β)** Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (2 - x^5)' = -5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για ενα και μόνο σημείο, στο $x = 0$, δηλ. εκτός από ενα *μεμονωμένο* σημείο. Συνεπώς, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το π.ο. της και αρα δεν μπορεί να λαμβάνει ακρότατες τιμές.

**(γ)** Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (x^3 + x^2 + 2x - 3)' = 3x^2 + 2x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η διακρίνουσα $\Delta$ του τριωνύμου $3x^2 + 2x + 2$ είναι $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20 < 0$ και αρα το τριώνυμο δεν έχει (πραγματικές) ρίζες και αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι $> 0$, έπεται ότι $3x^2 + 2x + 2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Έτσι,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το π.ο. της και αρα δεν μπορεί να λαμβάνει ακρότατες τιμές.

**Άσκηση 3**

Να αποδείξετε ότι:
**(α)** Η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 12x + 11,\ x \in \mathbb{R}$ έχει ολικό ελάχιστο για $x = 2$.

**(β)** Η συνάρτηση $g(x) = -x^3 + 3x - 1,\ x \in \mathbb{R}$ έχει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και τοπικό μέγιστο για $x = 1$.

**Λύση**

**(α)** Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = (3x^2 - 12x + 11)' = 6x - 12 = 6(x-2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$f'(x) = 0 \iff 6(x-2) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2.$$

Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της $f$ είναι το $x = 2$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $f'$ εκατέρωθεν του σημείου αυτού:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

είναι $f'(x) < 0$, $\forall x < 2$ και $f'(x) > 0$, $\forall x > 2$, δηλ. αριστερά του $x = 2$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά του γνησίως αύξουσα. Διαφορετικά, η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$. Έπεται ότι για $x = 2$, η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο.

**(β)** Το π.ο. της $g$ είναι το $\mathbb{R}$. Σε όλο το $\mathbb{R}$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = (-x^3 + 3x - 1)' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x-1)(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

$$g'(x) = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = \pm 1.$$

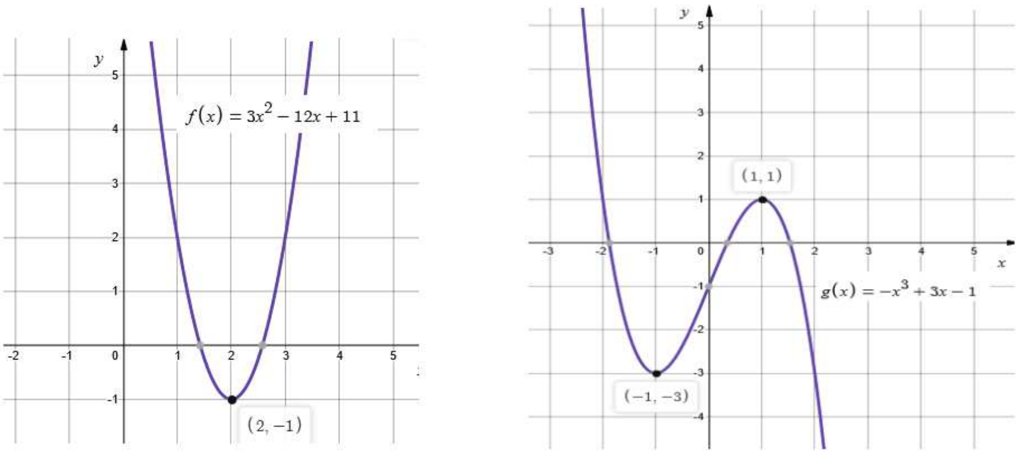
Άρα, τα κρίσιμα σημεία της $g$ είναι τα $x = \pm 1$. Ελέγχουμε το πρόσημο της $g'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

• Για $x < -1$ είναι $g'(x) < 0$ και αρα η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$)
• για $-1 < x < 1$ είναι $g'(x) > 0$ και αρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$)
• για $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$ και αρα η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ (μπορούμε να πούμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Από τα πιο πάνω, έπεται ότι το σημείο $(-1, g(-1)) = (-1, -3)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού ελαχίστου) του γραφήματος της $g$, ενω το σημείο $(1, g(1)) = (1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου (τοπικού μεγίστου) του γραφήματος της $g$.
Τα σημεία αυτά είναι τοπικά αλλά όχι ολικά ακρότατα για το γράφημα της $g$.

Μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα της $f$ με βάση όσα μάθαμε σε προηγούμενη τάξη, ενω της $g$ όχι. Για χάρην πληρότητας και μόνο, δίνουμε και το γράφημα της $g$ :




Σχήμα 1.5: Άσκηση 3/σελ.36

**Άσκηση 4**

Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο:

$$f(x) = kx^2 + \lambda x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $k$, $\lambda$ πραγματικές σταθερές.

**(α)** Αν η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο το -2, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των $k$ και $\lambda$.

**(β)** Τί είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση $f$ στο $x = 1$;

**Λύση**

Κατ'αρχάς, γιά κάθε τιμή των σταθερών $k$ και $\lambda$, η $f$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση, άρα παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

**(α)** Αφού η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό ακρότατο (το -2) και αφού είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, έπεται από το Θεώρημα του Fermat ότι $f'(1) = 0$. Είναι

$$f'(x) = (kx^2 + \lambda x + 3)' = 2kx + \lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα

$$f'(1) = 0 \iff 2k \cdot 1 + \lambda = 0 \iff k = -\frac{1}{2}\lambda \tag{1.2}$$

Επίσης, $f(1) = -2$, έπεται ότι $k \cdot 1^2 + \lambda \cdot 1 + 3 = -2$, δηλ.

$$k + \lambda = -5 \tag{1.3}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.2) και (1.3), λαμβάνουμε

$$k = 5 \qquad \text{και} \qquad \lambda = -10.$$

**(β)** Για τις τιμές αυτές των $k$ και $\lambda$, η συνάρτηση που προκύπτει είναι η

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 3 = 5(x-1)^2 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(1,-2)$ στο οποίο λαμβάνει ολικό ελάχιστο. Τον ισχυρισμό αυτό μπορούμε να τον δείξουμε και με εργαλεία του Διαφορικού Λογισμού, όπως πιο πάνω: Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της, δηλ. στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική με

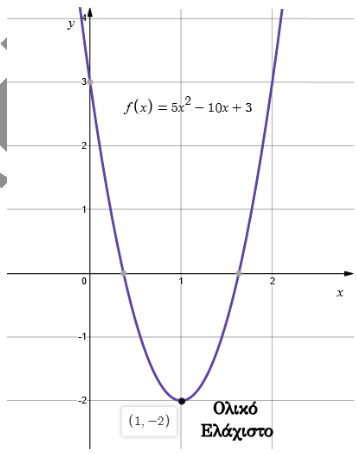
$$f'(x) = (5x^2 - 10x + 3)' = 10x - 10 = 10(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f'(x) < 0$, $\forall x < 1$ και $f'(x) > 0$, $\forall x > 1$, δηλ. αριστερά του $x = 1$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά του γνησίως αύξουσα. Έτσι, το γράφημα της $f$ στην περίπτωση αυτή παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $(1,-2)$.

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$(1,-2)$

Ολικό Ελάχιστο



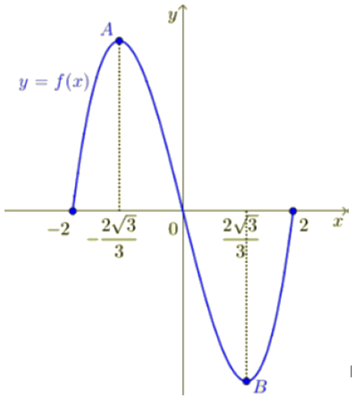

Σχήμα 1.6: Άσκηση 4.(β)/σελ.36

**Άσκηση 5**

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_A$ και $x_B$ και για τα οποία ισχύει $f(0)=0$.

Να βρείτε τις τιμές του $x\in[-2,2]$ για τις οποίες:

**(α)** $f'(x)=0$, **(β)** $f'(x)<0$, **(γ)** $f'(x)>0$




**Λύση**

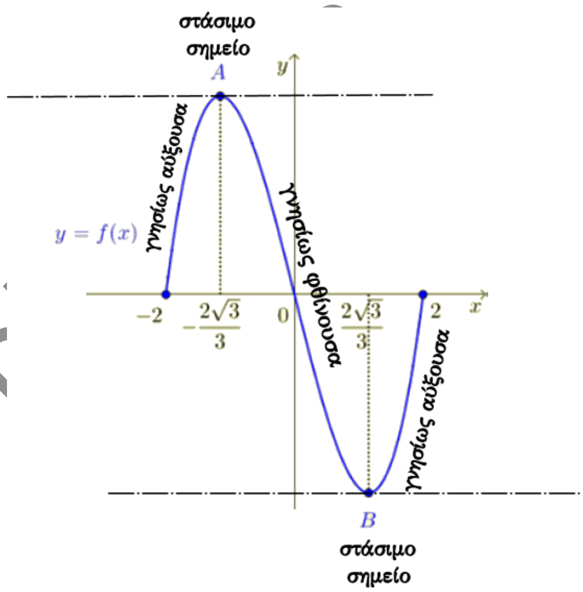
Εδω η συνάρτηση είναι παντου συνεχής και παντού παραγωγίσιμη.

**(α)** Τα σημεία $x$ στο γράφημα της $f$ για τα οποία είναι $f'(x)=0$ είναι εκείνα στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων (δηλ. έχει κλίση=0). Αυτά είναι τα

$$x=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \text{και} \qquad x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ .$$

**(β)** Τα σημεία $(x,f(x))$ στο γράφημα της $f$ για τα οποία είναι $f'(x)<0$, είναι εκείνα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, δηλ. για ολα τα σημεία $x$ του διαστήματος $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

**(γ)** Τα σημεία $(x,f(x))$ στο γράφημα της $f$ για τα οποία είναι $f'(x)>0$, είναι εκείνα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, δηλ. για ολα τα σημεία $x$ του διαστήματος $\left[-2,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ για ολα τα σημεία $x$ του διαστήματος $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$




Άσκηση 5/σελ.36