Κεφάλαιο 3

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

3.1. Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Πρώτου Είδους

Ορισμός 1.1. *Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα*

Έστω Γ μια κατά τμήματα λεία καμπύλη με παραμέτρηση $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ και έστω $F : U \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε, ορίζουμε ως *επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F κατά μήκος της καμπύλης $\vec{r}$* το ολοκλήρωμα

$$\int_\Gamma F\, d\sigma(\Gamma) := \int_a^b (F \circ \vec{r})(t) \cdot \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt. \tag{3.1}$$

Θεώρημα 1.1.

Έστω Γ μια κατά τμήματα λεία καμπύλη με παραμέτρηση $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια κατά τμήματα λεία καμπύλη και έστω $F : U \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Έστω $\phi : [c,d] \to [a,b]$ μια παραγωγίσιμη 1-1 και επί συνάρτηση συνεχής συνάρτηση με $\phi'(t) \neq 0,\ \forall t \in [c,d]$. Τότε,

$$\int_\Gamma F\, d\sigma(\Gamma) = \int_{\Gamma \circ \phi} F \circ \phi\, d\sigma(\Gamma(\phi)). \tag{3.2}$$

1.1 Οι περιπτώσεις $n = 2, 3$

• Αν $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ x \in [a,b]$, τότε το δεξιό μέλος της (3.1) γίνεται

$$\int_a^b F(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \tag{3.3}$$

Αν η $\vec{r}$ είναι το γράφημα της συνάρτησης $y = \phi(x),\ x \in [a,b]$, τότε

$$\int_U F d\sigma(U) = \int_a^b F(x, \phi(x)) \sqrt{1 + [\phi'(t)]^2} dx.$$

Συγκεκριμένα, το μήκος $L(\overrightarrow{r})$ της $\overrightarrow{r}$ δίνεται από την

$$L(\overrightarrow{r}) = \int_a^b \sqrt{1 + [\phi'(t)]^2} dx.$$

Πολικές συντεταγμένες Έστω $\overrightarrow{r}$ μια καμπύλη στην $\mathbb{R}^2$ με παραμέτρηση

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t). \end{aligned}$$

Τότε,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}.$$

Συνεπώς, το μήκος $L(\overrightarrow{r})$ μιας καμπύλης $\overrightarrow{r}$ παραμετρημένης με πολικές συντεταγμένες δίνεται από τη σχέση

$$L(\overrightarrow{r}) = \int_a^b \|\overrightarrow{r}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{3.4}$$

Ειδικότερα, αν $t = \theta$, τότε ο πιο πάνω τύπος γίνεται

$$L(\overrightarrow{r}) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \tag{3.5}$$

- Αν $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ με $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ x \in [a, b]$, τότε το δεξιό μέλος της (3.1) γίνεται

$$\int_a^b F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{3.6}$$

Θα δούμε τώρα πως το στοιχείο μήκους $\|\overrightarrow{r}'(t)\|$ στην (3.6) εκφράζεται κάτω από κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες:

1. Κυλινδρικές:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t) \\ z(t) &= z(t), \quad t \in [a, b] \end{aligned}$$

Τότε, εύκολα βλέπουμε οτι

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

2. Σφαιρικές:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\theta(t)\sin\phi(t) \\ z(t) &= r(t)\cos\phi(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Τότε, εύκολα βλέπουμε οτι

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\sin\phi(t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}.$$

Παραδείγματα

1. Θα υπολογίσουμε το $\int_C \frac{1}{x-y}\, d\sigma(C)$ όπου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $A(0,-2)$ και $B(4,0)$. Θεωρούμε λοιπόν μια παραμέτρηση του C, έστω την

$$\overrightarrow{r}(t)=tB+(1-t)A=(4t,2t-2),\quad t\in[0,1]$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{x-y}d\sigma(C) &\overset{(3.2)}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt{4^2+2^2}}{4t-(2t-2)}\,dt\\ &= \frac{\sqrt{20}}{2}\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt=\frac{\sqrt{20}}{2}[\ln|t+1|]_0^1\\ &= \frac{\sqrt{20}}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

2. Θα υπολογίσουμε το $\int_C x^4y\,d\sigma(C)$ όπου C είναι η καμπύλη η οποία ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2=9$ προσανατολισμένη κατά τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Παρατηρούμε οτι η καμπύλη C παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα $r=3$. Θεωρούμε λοιπόν την αντίστοιχη παραμέτρηση της C με πολικές συντεταγμένες

$$x(t)=3\cos t,\qquad y(t)=3\sin t,\quad t\in[0,2\pi].$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_C x^4yd\sigma(C) &\overset{(3.1)}{=} \int_0^{2\pi} x^4(t)y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} 3^4\cos^4 t3\sin t\sqrt{9\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt\\ &= 3^6\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin t\,dt\\ &= -3^6\int_0^{2\pi}\cos^4 t(\cos t)'\,dt\\ &= -\frac{3^6}{5}[\cos^5 t]_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

3. Θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης C η οποία δίνεται από την εξίσωση $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $(a>0)$. Η εξίσωση της πιο πάνω καμπύλης γράφεται ισοδύναμα ως

$$(x^{\frac{2}{3}})^2+(y^{\frac{2}{3}})^2=(a^{\frac{2}{3}})^2.$$

Συνεπώς, θεωρούμε τις αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες

$$x^{\frac{1}{3}}(t) = a^{\frac{1}{3}}\cos t, \qquad y^{\frac{1}{3}}(t) = a^{\frac{1}{3}}\sin t$$

δηλ.

$$x(t) = a\cos^3 t, \qquad y(t) = a\sin^3 t.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} L(\overrightarrow{r}) &\overset{(3.5)}{=} \int_0^{2\pi} \sqrt{[a3\cos^2 t(-\sin t)]^2 + [a2\sin^2 t\cos t]^2}\,dt \\ &= 3a\int_0^{2\pi} \cos t\sin t\,dt = 12a. \end{aligned}$$

4. Θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης C η οποία δίνεται από την εξίσωση $\overrightarrow{r}(t) = (|t|, |t-1|, e^t),\ t \in [-1,2]$. Είναι

$$\begin{aligned} t \in [-1,0] &\Rightarrow \overrightarrow{r}(t) = (-t, 1-t, e^t) \quad : C_1 \\ t \in [0,1] &\Rightarrow \overrightarrow{r}(t) = (t, 1-t, e^t) \quad : C_2 \\ t \in [1,2] &\Rightarrow \overrightarrow{r}(t) = (t, t-1, e^t) \quad : C_3. \end{aligned}$$

Τότε, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ και άρα

$$L(\overrightarrow{C}) = L(\overrightarrow{C_1}) + L(\overrightarrow{C_2}) + L(\overrightarrow{C_3}).$$

Είναι

$$\begin{aligned} L(\overrightarrow{C_1}) &= \int_{-1}^0 \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + e^{2t}}\,dt = \int_{-1}^0 \sqrt{2+e^{2t}}\,dt \\ L(\overrightarrow{C_2}) &= \int_0^1 \sqrt{1^2 + (-1)^2 + e^{2t}}\,dt = \int_0^1 \sqrt{2+e^{2t}}\,dt \\ L(\overrightarrow{C_3}) &= \int_1^2 \sqrt{1^2 + 1^2 + e^{2t}}\,dt = \int_1^2 \sqrt{2+e^{2t}}\,dt. \end{aligned}$$

Το $\int \sqrt{2+e^{2t}}\,dt$ υπολογίζεται θεωρώντας το μετασχηματισμό $u = \sqrt{2+e^{2t}}$.

5. Να υπολογιστεί το $\int_C x d\sigma(c)$ σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   I $\overrightarrow{C}(t) = t^2,\ t \in [-1,1]$.

   II $\overrightarrow{C}$ το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $A(-2,2)$ στο σημείο $B(2,2)$.
   Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C f(x,y,z)d\sigma(c) &\overset{(3.6)}{=} \int_0^{2\pi} e^t\sqrt{\cos^2 t + (-\sin t)^2}\,dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} e^t\,dt = \sqrt{2}(e^{2\pi}-1). \end{aligned}$$

III $\overrightarrow{C}$ το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $A(2,2)$ στο σημείο $B(-2,2)$.
Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)d\sigma(c) &\overset{(3.6)}{=} \int_1^3 3t\cdot 2t\sqrt{t'+(3t)'+(2t)'}\,dt\\ &= 2\sqrt{14}\int_1^3 2t^2\,dt = 2\sqrt{14}[t^3]_1^3 = 52\sqrt{14}.\end{aligned}$$

6. Να υπολογιστεί το $\int_C f(x,y,z)d\sigma(c)$ σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

I $f(x,y,z)=e^z$ και $\overrightarrow{C}(t)=(\sin t,\cos t,t),\ t\in[0,2\pi]$.

II $f(x,y,z)=yz$ και $\overrightarrow{C}(t)=(t,3t,2t),\ t\in[1,3]$.

Καμπύλη	Παραμέτρηση (+)	Παραμέτρηση (-)
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	$x=x_0+r\cos t$	$x=x_0+r\cos t$
$y=y_0+r\sin t,\ t\in[0,2\pi]$	$y=y_0-r\sin t,\ t\in[0,2\pi]$	$y=y_0-r\sin t,\ t\in[0,2\pi]$.
$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}$	$x=x_0+a\cos t$ $y=y_0+b\sin t,\ t\in[0,2\pi]$	$x=x_0+a\cos t$ $y=y_0-b\sin t,\ t\in[0,2\pi]$
$\overrightarrow{r}: A\hookrightarrow B$	$\overrightarrow{r}(t)=Bt+(1-t)A$	$\overrightarrow{r}(t)=Bt+(1-t)A$

3.2. Επικαμπύλια Ολοκληρώματα Δευτέρου Είδους

Ορισμός 2.1. *Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα Δευτέρου είδους*

Έστω C μια λεία τάξεως C^1 καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμέτρησή της με $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$. Έστω $\overrightarrow{F} : \overrightarrow{r}([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ συνεχής. Τότε, ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της C την ποσότητα

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b (\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r})(t) \cdot \nabla \overrightarrow{r}(t)\, dt. \tag{3.7}$$

Σημείωση: Το ολοκλήρωμα στην $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ αναφέρεται και ως το έργο W που παράγει η (μη σταθερή) δύναμη $\overrightarrow{F}$ στην κίνησή της κατά μήκος της καμπύλης C.

2.1 Οι περιπτώσεις $n = 2, 3$

• Στην περίπτωση που C μια λεία τάξεως C^1 καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια παραμέτρησή της τέτοια ώστε $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, και $\overrightarrow{F} : \overrightarrow{r}([a,b]) \to \mathbb{R}^2$ ένα συνεχές δ.π., $\overrightarrow{F} = (P, Q)$, τότε, η σχέση (3.7) γίνεται ολοκλήρωμα της

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot \nabla \overrightarrow{r}(t) d\overrightarrow{r} &= \int_a^b (\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r})(t) \cdot \nabla \overrightarrow{r}(t) dt \qquad (3.8)\\
&= \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt\\
&= \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}\right) dt. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

• Στην περίπτωση που C μια λεία τάξεως C^1 καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$ με $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), y(t))$ μια παραμέτρησή της τέτοια ώστε $\overrightarrow{r}'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$, και $\overrightarrow{F} : \overrightarrow{r}([a,b]) \to \mathbb{R}^3$ ένα συνεχές δ.π., $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$, τότε, η σχέση (3.7) γίνεται ολοκλήρωμα της

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F} \cdot \nabla \overrightarrow{r}(t) d\overrightarrow{r} &= \int_a^b (\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r})(t) \cdot \nabla \overrightarrow{r}(t) \qquad (3.10)\\
&= \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt\\
&= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t))\frac{dy}{dt} + \right.\\
&\left. + R(x(t), y(t), z(t))\frac{dz}{dt}\right) dt. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Συμβολικά: $\dfrac{dx}{dt} = x'(t)$, $\dfrac{dy}{dt} = y'(t)$, $\dfrac{dz}{dt} = z'(t)$.

Παραδείγματα

1. Θα υπολογίσουμε το έργο που παράγεται από την επίδραση της δύναμης

$$\overrightarrow{F}(x,y)=\left(\frac{1}{x^2+y^2},\frac{3}{x^2+y^2}\right)$$

κατά τη μετακίνηση ενός σωματιδίου κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων $(1,1)\to(2,2)$ και από το $(2,2)\to(4,2)$. Είναι

$$\text{Έργο}=\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}(t)=\int_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}(t)+\int_{C_2}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}(t),$$

όπου $C_1=(1,1)\to(2,2)$ και $C_2=(2,2)\to(4,2)$. αντίστοιχα. Θεωρούμε τις παραμετρήσεις

$$\begin{array}{ll}\overrightarrow{r}_1: & \overrightarrow{r}_1(t)=(t+1,t+1),\ t\in[0,1]\\ \overrightarrow{r}_2: & \overrightarrow{r}_2(t)=(t,2),\ t\in[2,4]\end{array}$$

των C_1 και C_2 αντίστοιχα. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}(t) &\overset{(3.11)}{=} \int_0^1\left[\frac{1}{(t+1)^2+(t+2)^2}(1+t)'+\frac{3}{(t+1)^2+(t+2)^2}(1+t)'\right]dt\\ &= 2\int_0^1\frac{dt}{(t+1)^2}=-\left[\frac{2}{t+1}\right]_0^1=1\end{aligned}$$

και ομοίως,

$$\begin{aligned}\int_{C_2}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r}(t) &\overset{(3.11)}{=} \int_2^4\left[\frac{1}{(t+1)^2+(t+2)^2}(1+t)'+\frac{3}{(t+1)^2+(t+2)^2}(1+t)'\right]dt\\ &= 4\int_2^4\frac{1}{t^2+4}dt=4\int_2^4\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}dt=4\arctan\left(\frac{t}{2}\right)_2^4\\ &= 4\left[\arctan(2)-\arctan(1)\right]=4\arctan(2)-\pi\end{aligned}$$

2. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Έστω $C(0,r):=\{y\in\mathbb{R}^2:|y|=r\}$, $(r>0)$ και η παραμέτρηση

$$\begin{aligned}x\equiv x(t) &= r\cos t\\ y\equiv y(t) &= r\sin t,\quad t\in[0,2\pi]\end{aligned}$$

αυτού. Τότε,

$$\begin{aligned}\int\limits_{C(0,r)}\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} &\overset{(3.11)}{=} \int\limits_{t=0}^{2\pi}\frac{(-r\sin t)(-r\sin t)+(r\cos t)(r\cos t)}{(r\sin t)^2+(r\cos t)^2}dt\\ &= \int\limits_{t=0}^{2\pi}dt=2\pi.\end{aligned}$$

3. Θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C x^2dx + xydy$, όπου C είναι το σύνορο του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $A(0,0),\ B(0,1),\ C(1,0)$ και $D(1,1)$ με θετικό προσανατολισμό την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Γράφουμε το C: $C = c_1^+ \cup c_2^+ \cup c_3^- \cup c_4^-$, όπου $c_1^+,\ C_2^+, C_3^-,\ C_4^-$ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $A \to B,\ B \to C,\ C \to D$ και $D \to A$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τις παραμετρήσεις των:

$$\begin{array}{ll} c_1^+: & x(t) = t,\ y(t) = 0,\ t \in [0,1] \\ c_2^+: & x(t) = 1,\ y(t) = t,\ t \in [0,1] \\ c_3^-: & x(t) = 1-t,\ y(t) = 1,\ t \in [0,1] \\ c_4^-: & x(t) = 0,\ y(t) = 1-t,\ t \in [0,1]. \end{array}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_C x^2dx + xydy &= \int_{c_1^+\cup c_2^+\cup c_3^-\cup c_4^-} x^2dx + xydy \\ &= \left(\int_{c_1^+} + \int_{c_2^+} + \int_{c_3^-} + \int_{c_4^-}\right) x^2dx + xydy \\ &\overset{(3.11)}{=} \int_0^1 [t^2(1)' + 1t(1)']dt + \int_0^1 [1^2(t)' + 1t(1)']dt + \\ &+ \int_0^1 [(1-t)^2 1' + (1-t)1(1)']dt + \int_0^1 [0^2(1-t)' + 0(1-t)(1-t)']dt \\ &= \int_0^1 (t^2+1)dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Παρατηρηση Είναι

$$-\int_{C^-} \overrightarrow{F} \cdot d\sigma(C) = \int_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\sigma(C). \tag{3.12}$$

Τώρα θα δούμε κάτι ανάλογο του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

Ορισμός 2.2. *Συντηρητικό δ.π.*

Ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει μια συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$.

Θεώρημα 2.1.

Έστω $\overrightarrow{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό.
2. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C F\cdot d\overrightarrow{r}$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης C. Δηλ. είναι ανεξάρτητο της επιλογής καμπύλης.
3. Είναι
$$\int_C F\cdot d\overrightarrow{r} = 0$$
για κάθε κλειστή καμπύλη Jordan C.

Απόδειξη. $(i) \to (ii)$ Προκύπτει εύκολα από τον κανόνα της αλυσίδας και το 1ο ΘΘΑΛ. Θα το κάνουμε στην περίπτωση $n = 3$. Πράγματι, έστω οτι η καμπύλη $\overrightarrow{r}$ είναι η $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t\in[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_C \nabla F\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z}z'(t)\right)\\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(F\circ\overrightarrow{r})dt\\ &= F(\overrightarrow{r}(b)) - F(\overrightarrow{r}(a)). \end{aligned}\tag{3.13}$$

$(ii) \to (iii)$ Έστω C μια κλειστή καμπύλη Jordan. Επιλέγουμε δύο σημεία $a, b,\ a\neq b$ πάνω στη C. Τότε, σπάμε την καμπύλη C στην ένωση των δύο καμπύλων C_1 από το a στο b και στη C_2 από το b στο a. Οι δύο αυτές καμπύλες είναι ίδιες αλλά με αντίθετο προσανατολισμό. Από υπόθεση είναι

$$\int_C F\cdot d\overrightarrow{r} = 0,$$

όπου $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμέτρηση της C. Αλλά,

$$\int_C F\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} F\cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} F\cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b F\cdot d\overrightarrow{r} - \int_a^b F\cdot d\overrightarrow{r} = 0.$$

$(iii) \to (ii)$ Έστω $C_1,\ C_2$ δύο καμπύλες με άκρα τα σημεία a και b. Έστωσαν $\overrightarrow{r}_1,\ \overrightarrow{r}_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ παραμετρήσεις των C_1 και C_2 αντίστοιχα. Με $-C_2$ συμβολίζουμε την καμπύλη C_2 με αντίστροφη φορά, δηλ. από το b στο a. Τότε, η καμπύλη $C_1\cup(-C_2)$ είναι μια κλειστή καμπύλη και άρα από την υπόθεση,

$$\int_{C_1\cup(-C_2)} F\cdot d\overrightarrow{r} = 0. \tag{3.14}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}\int_{C_1\cup(-C_2)} F\cdot d\overrightarrow{r} &= \int_{C_1} F\cdot d\overrightarrow{r_1} + \int_{-C_2} F\cdot d\overrightarrow{r_2} \\ &= \int_{C_1} F\cdot d\overrightarrow{r_1} - \int_{C_2} F\cdot d\overrightarrow{r_2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Από τις (3.13) και (3.14) έπεται οτι

$$\int_{C_1} F\cdot d\overrightarrow{r_1} = \int_{C_2} F\cdot d\overrightarrow{r_2}.$$

$(iii) \to (i)$ □

Θεώρημα 2.2.

Κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι αστρόβιλο.

Απόδειξη. Το αποδεικνύουμε στην περίπτωση $n=3$. Αφού το $\overrightarrow{F}$ είναι συντηρητικό, τότε υπάρχει μια συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$, δηλ. $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = (F_1, F_2, F_3)$. Τότε,

$$\begin{aligned} curl\overrightarrow{F} &= \nabla\times\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right)\overrightarrow{j} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right)\overrightarrow{k} \\ &= 0, \end{aligned}$$

από το Θεώρημα του Schwarz, αφού η ϕ είναι τάξεως C^1.

Παρατηρηση

1. Υπενθύμιση: Ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ στον $\mathbb{R}^2$ είναι αστρόβιλο $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.
2. Το αντίστροφο του πιο πάνω Θεωρήματος δεν ισχύει εν γένει. Για παράδειγμα, έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \Big(\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{P(x,y)}, \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Q(x,y)}\Big), \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}) \tag{3.16}$$

   στον $\mathbb{R}^2$. Είναι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ και άρα το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο. Όμως αυτό δεν είναι συντηρητικό γιατί αν ήταν, τότε θα υπήρχε μια συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$ και άρα

$$2\pi = \int_{C(0,1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{C(0,1)} \nabla\phi(x,y) = 0,$$

   άτοπο.

□

Από τους πιο πάνω υπολογισμούς, για να είναι ένα δ.π. $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ στον $\mathbb{R}^3$ συντηρητικό, αναγκαίες συνθήκες είναι οι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{3.17}$$

ενώ για ένα δ.π. $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ στον $\mathbb{R}^2$ αναγκαίες συνθήκες είναι οι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{3.18}$$

Στην περίπτωση που το δ.π. είναι ομαλό, τότε το αντίστροφο του Θεωρήματος (2.2) ισχύει:

Πρόταση 2.1.

Έστω $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ένα C^1 τάξεως δ.π.. Αν το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, δηλ. $curl\overrightarrow{F} := \nabla \times \overrightarrow{F} = 0$, τότε αυτό είναι συντηρητικό.

Ορισμός 2.3. *Συνεκτικό και απλά συνεκτικό σύνολο*

1. Ένα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται συνεκτικό αν δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση δύο ή περισσοτέρων μή κενών ανοικτών συνόλων.
2. Ένα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συνεκτικό λέγεται απλά συνεκτικό αν κάθε καμπύλη Jordan C στο U αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to U$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \in U$,
$$\phi(x,0) = x, \quad \phi(x,1) \in U, \quad \phi(y,1) = y.$$

Παραδείγματα

1. Ο $\mathbb{R}^2$ και ο $\mathbb{R}^3$ είναι απλά συνεκτικά σύνολα.
2. Το σύνολο
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$
είναι απλά συνεκτικό.
3. Το σύνολο
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 = 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\}$$
είναι απλά συνεκτικό.
4. Το σύνολο
$$\mathbb{B}^2(0,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < r\}$$
καθώς και το σύνορό του
$$\mathbb{S}^2(0,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r\}, \quad (r > 0)$$
είναι απλά συνεκτικά.

5. Το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \ell$, όπου ℓ είναι μια οποιαδήποτε ευθεία στον $\mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό.

6. Το σύνολο
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$
ΔΕΝ είναι απλά συνεκτικό.

7. Το σύνολο
$$\mathbb{R}^3 \setminus \{x - \text{άξονα}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \neq 0\}$$
ΔΕΝ είναι απλά συνεκτικό.

Θεώρημα 2.3. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ανοικτό και απλά συνεκτικό. Έστω $\overrightarrow{F} : U \to \mathbb{R}^3$ ένα συνεχές δ.π.. Αν το $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο, (δηλ. $curl\overrightarrow{F} = 0$), τότε αυτό είναι συντηρητικό (στο U).*

Παρατηρήσεις

1. Συνεπώς, στα απλά συνεκτικά χωρία, οι έννοιες συντηρητικό και αστρόβιλο ταυτίζονται. Αν το χωρίο δεν είναι συντηρητικό, τότε δεν μπορούμε μόνο με τη συνθήκη του αστρόβιλου να αποφανθούμε οτι ένα δ.π. είναι και συντηρητικό. Χρειαζόμαστε περαιτέρω ανάλυση. Για παράδειγμα, το δ.π.
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \tag{3.19}$$
είναι ορισμένο σε μη απλά συνεκτικό σύνολο αλλά είναι συντηρητικό. Ας βρούμε ένα δυναμικό του, δηλ. μία συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $F = \nabla\phi$, δηλ. $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Έχουμε:
$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + h(y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + h(y) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + h'(y). \end{aligned} \tag{3.20}$$
Έτσι, από την (3.20) και τη δεύτερη συνθήκη $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$, έχουμε οτι $h'(y) = 0$ και άρα μπορούμε να πάρουμε για h οποιαδήποτε σταθερά συνάρτηση. Έτσι, για $c = 0$, έχουμε ότι την
$$\phi(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$
η οποία είναι (ένα) δυναμικό του δ.π..

2. Το γεγονός ότι το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό ανταναклάται στο ότι το δ.π. (3.16) δεν είναι συντηρητικό. Στις 3 διαστάσεις, το αντίστοιχο σύνολο είναι το $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ το οποίο είναι απλά συνεκτικό, καθώς στον $\mathbb{R}^3$ έχουμε αρκετό χώρο να κινηθούμε γύρω από το $(0,0,0)$. Αν όμως αφαιρέσουμε μια ολόκληρη ευθεία, όπως π.χ. κάποιον από τους άξονες, τότε αυτό παύει να είναι απλά συνεκτικό. Τότε, μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα δ.π. το οποίο να μην είναι συντηρητικό. Για παράδειγμα, το
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right),$$
ορισμένο στο σύνολο
$$U = \mathbb{R}^3 \setminus \{z - \text{άξονα}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy \neq 0\}.$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε οτι

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\sigma(C) = 2\pi$$

για C οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη γύρω από τον $z-$άξονα, π.χ. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cap \{z = 0\}$.

Παραδείγματα

1. Έστω το δ.π. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, x^2, 0)$ στον $\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε την προβολή του δ.π. στον $\mathbb{R}^2$, δηλ. το δ.π. $\overrightarrow{G}(x,y) = (y, x^2)$. Θέτουμε $P(x,y) = y$ και $Q(x,y) = x^2$. Το $\overrightarrow{G}$ είναι ορισμένο σε όλο το $\mathbb{R}^2$. Όμως δεν είναι συντηρητικό. Πράγματι, αφού

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Έστω το δ.π. $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy^3, 3y^2x^2)$ στον $\mathbb{R}^2$. Θέτουμε $P(x,y) = 2xy^3$ και $Q(x,y) = 3y^2x^2$. Το Το $\overrightarrow{F}$ είναι ορισμένο σε όλο το $\mathbb{R}^2$ και άρα, αφού

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

έπεται οτι είναι αστρόβιλο και άρα από το Θεώρημα (2.3) είναι και συντηρητικό. Ένα δυναμικό του είναι η συνάρτηση

$$\phi(x,y) = \frac{8}{27}x^2y^3,$$

όπως εύκολα μπορούμε να δούμε: ψάχνουμε μια ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$. Ισοδύναμα,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 \tag{3.21}$$

και

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3y^3x^2. \tag{3.22}$$

Έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 \Rightarrow \phi(x,y) = \int 2xy^3\,dx + h(y) = x^2y^3 + h(y) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x^2y^2}{3} + h'(y). \tag{3.23}$$

Από τις (3.22) και (3.23) έχουμε οτι

$$3x^2y^2 = \frac{x^2y^2}{3} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = \frac{8}{9}x^2y^2 \Rightarrow h(y) = \frac{8}{9}\int x^2y^2\,dy + c = \frac{8}{27}x^2y^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για $c = 0$ έχουμε $\phi(x,y) = \frac{8}{27}x^2y^3$. Ώς εφαρμογή, θα υπολογίσουμε το $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, όπου $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $A(0,1)$ στο σημείο $B(2,-2)$. Είναι

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{A(0,1)}^{B(2,-2)} \nabla \cdot d\overrightarrow{r} = \phi(B) - \phi(A) = -\frac{2^5 35}{27}.$$

3. Θα υπολογίσουμε το $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$, όπου $\overrightarrow{F}(x,y,z) = ydx + (x+e^z)dy + ye^z dz$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο $A(1,1,0)$ στο σημείο $B(a,b,c)$, όπου $a,b,c \in \mathbb{R}$ και $(a,b,c) \neq (1,1,0)$. Θέτουμε $P(x,y,z) = y$, $Q(x,y,z) = x + e^z$ και $R(x,y,z) = ye^z$. Το $\overrightarrow{F}$ είναι συνεχές και άρα για να είναι συντηρητικό αρκεί να είναι αστρόβιλο, δηλ. να ισχύουν οι σχέσεις (3.17), οι οποίες επαληθεύονται εύκολα. Θα βρούμε ένα δυναμικό του, δηλ. μια ϕ τάξεως C^1 στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $\nabla\phi = \overrightarrow{F}$, δηλ.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + e^z \tag{3.25}$$

και

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = ye^z. \tag{3.26}$$

Έχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y \Rightarrow \phi(x,y,z) = xy + h_1(y,z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = x + h_1'(y,z). \tag{3.27}$$

Από τις (3.26) και (3.27) έχουμε οτι

$$x + \frac{\partial h_1}{\partial y} = x + e^z \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial y} = e^z \Rightarrow h_1(y,z) = ye^z + h_2(z). \tag{3.28}$$

και άρα από τις (3.27) και (3.28) έχουμε οτι

$$\phi(x,y,z) = xy + ye^z + c_2(z) \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = ye^z + h_2'(z). \tag{3.29}$$

Έτσι, από τις (3.26) και (3.29) έχουμε οτι

$$ye^z = ye^z + h_2'(z) \Rightarrow h_2'(z) = 0 \Rightarrow h_2(z) = c \in \mathbb{R}.$$

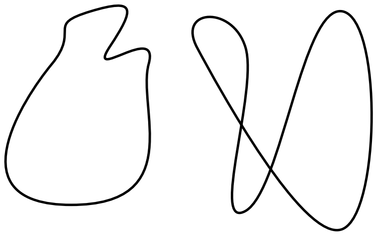
Άρα, για $c = 0$, ένα δυναμικό είναι η $\phi(x,y,z) = xy + ye^z$. Συνεπώς,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\overrightarrow{r} = [xy + ye^z]_{(1,1,0)}^{(a,b,c)} = ab + be^c - 2.$$

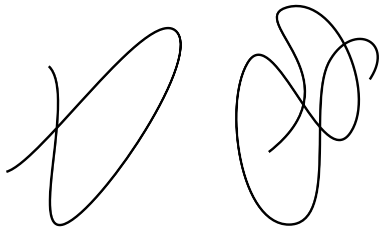
Ορισμός 2.4. *Καμπύλη Jordan*

Έστω Γ μια καμπύλη και $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ μια παραμέτρησή της. Η Γ λέγεται καμπύλη Jordan αν

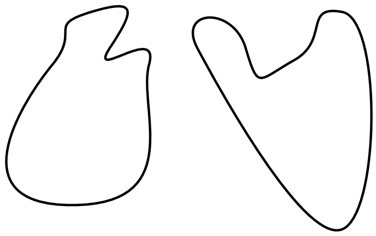
1. Ο περιορισμός της Γ στο (a,b) είναι 1-1, δηλ. για κάθε $t_1, t_2 \in (a,b)$ με $t_1 \neq t_2$, είναι $\overrightarrow{r}(t_1) \neq \overrightarrow{r}(t_2)$.
2. Είναι κλειστή, δηλ. $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$.
3. Είναι συνεχής.



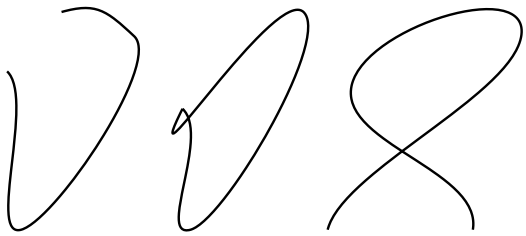
κλειστές καμπύλες



ανοικτές καμπύλες



καμπύλες *Jordan*



καμπύλες όχι *Jordan*

Θεώρημα 2.4. *Stokes*

Έστω S μια προσανατολισμένη ομαλή επιφάνεια η οποία είναι φραγμένη από μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan C. Έστω $\overrightarrow{r}$ μια παραμέτρηση της C. Έστω $\overrightarrow{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο. Τότε,

$$\int_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot d\sigma(S). \tag{3.30}$$

Παρατηρήσεις

• Αν S χωρίο στο επίπεδο (προσανατολισμένο προς τα πάνω) με σύνορο ∂S μια Jordan καμπύλη και $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ συνεχές διανυσματικό πεδίο στο S, τότε

$$\iint_S \nabla \times \overrightarrow{F} \cdot d\sigma(S) = \iint_S (\nabla \times \overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n}\, dA(S)$$

όπου $\overrightarrow{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη $C^+ \equiv \partial S$ και αφού $\text{curl}\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F}$, ο τύπος (3.30) γίνεται

$$\int_{C^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \text{curl}\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dA(S). \tag{3.31}$$

Το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της πιο πάνω εκφράζει τη συνολική ροή που εισέρχεται ή εξέρχεται εντός του χωρίου S ανα μονάδα χρόνου υπο την επίδραση της δύναμης $\overrightarrow{F}$. Είναι ουσιαστικά η μορφή του Θεωρήματος του Green που εκφράζει ακριβώς τη ροη αυτή. Έτσι, το Θεώρημα του Green (στο επίπεδο) είναι συνέπεια του (γενικότερου) Θεωρήματος του Stokes.

• Αν $S \subset \mathbb{R}^2$ με σύνορο ∂S μια Jordan καμπύλη και $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ συνεχές διανυσματικό πεδίο στο S, τότε ο τύπος (3.30) γίνεται

$$\int_{\partial S^+} Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{3.32}$$

Χρησιμοποιώντας τον τελευταίο τύπο σε συνδυασμό με το ότι ένα διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ στον $\mathbb{R}^2$ είναι αστρόβιλο $\Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ανεξαρτησία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος είναι συνέπεια της συνθήκης $\mathrm{curl}\overrightarrow{F} = 0$, δηλ. ότι το δ.π. $\overrightarrow{F}$ είναι αστρόβιλο: πράγματι, έστω C_1^+ και C_2^+ δυο παραμετρήσεις της κατα τμήματα ομαλής απλής καμπύλης C στο επίπεδο με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο B. Τότε αφού η καμπύλη $C_1^+ \cup C_2^-$ είναι κλειστή και $\mathrm{curl}\overrightarrow{F} = 0$, από τον (3.32) έχουμε ότι

$$\int_{C_1^+ \cup C_2^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

και αρα

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2^-} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

δηλ.

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

δηλ.

$$\int_{C_1^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_2^+} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

• Ο τύπος (3.30) γράφεται και ως

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma(S) = \iint_D \nabla \cdot \overrightarrow{F}\, dxdy \tag{3.33}$$

ή (αφού $\mathrm{div}\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$)

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\sigma(S) = \iint_D \mathrm{div}\overrightarrow{F}\, dxdy \tag{3.34}$$

όπου $\overrightarrow{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη D.

• Το θεώρημα του Stokes σε συνδυασμό με την έννοια του συντηρητικού πεδίου, μας δίνει έναν εύκολο τρόπο να υπολογίζουμε επικαμπύλια ολοκληρώματα. Για παράδειγμα, στο επίπεδο, έστω οτι μας δίνεται το

$$\int_C Pdx + Qdy,$$

όπου C μια καμπύλη Jordan. Αν είναι $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ και αν οι P, Q ορίζονται και είναι συνεχείς στο εσωτερικό της C, τότε

$$\int_C Pdx + Qdy = 0.$$

Αν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο εσωτερικό της C για το οποίο δέν ορίζεται μια τουλάχιστον από τις P, Q, τότε το $\int_C Pdx + Qdy$ είναι το ίδιο για οποιαδήποτε καμπύλη που περιέχει το ανώμαλο σημείο στο εσωτερικό της. Για παράδειγμα, έστο το δ.π. $\overrightarrow{F}$ της (3.16). Είδαμε οτι $\int_{C(0,1)} Pdx + Qdy = 2\pi$. Θα δείξουμε οτι το ολοκλήρωμα θα ισούται με 2π ανεξάρτητα από την επιλογή καμπύλης. Έστω λοιπόν

C_1 μια άλλη καμπύλη για την οποία το σημείο $(0,0)$ ανήκει στο εσωτερικό της. Τότε, αν D το χωρίο που ευρίσκεται μεταξύ των C_1 και $C(0,1)$, θα είναι $\partial D = C_1^- \cup C(0,1)$ και τότε

$$\int_{C_1^- \cup C(0,1)} [Pdx + Qdy] \overset{(3.32)}{=} \iint_D (P_y - Q_x) = 0.$$

Όμως,

$$\int_{C_1^- \cup C(0,1)} [Pdx + Qdy] = \int_{C(0,1)} [Pdx + Qdy] - \int_{C_1^-} [Pdx + Qdy]$$

και οι δύο τελευταίες σχέσεις μας δίνουν ότι

$$\int_{C(0,1)} [Pdx + Qdy] = \int_{C_1^-} [Pdx + Qdy] = 2\pi.$$

Εφαρμογή: Τύπος ολοκλήρωσης κατα μέρη

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ και έστω $f, g : D \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις τάξεως C^2. Τότε,

$$\iint_D g\Delta f \, dxdy = \int_C (g\nabla f) \cdot \vec{n} \, dS - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dxdy. \tag{3.35}$$

Απόδειξη. Από τον τύπο (3.33) έχουμε:

$$\int_C (g\nabla f) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D \nabla \cdot (g\nabla f) \, dxdy \tag{3.36}$$

Από γνωστή μας ταυτότητα[1] έχουμε

$$\nabla \cdot (g\nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g(\nabla \cdot (\nabla f))$$

και αφού $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \equiv \Delta f$, η (3.36) δίνει

$$\int_C (g\nabla f) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D g\Delta f \, dxdy + \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dxdy$$

δηλ.

$$\iint_D g\Delta f \, dxdy = \int_C (g\nabla f) \cdot \vec{n} \, dS - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \, dxdy.$$

□

Παραδείγματα

1. Θα επαληθεύσουμε τη σχέση (3.32) για το δ.π. $\vec{F}(x,y) = (-y^3 + x, x^3 + y)$ στο χωρίο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Το χωρίο D είναι ο δακτύλιος που βρίσκεται μεταξύ των κύκλων $C(0,1)$ και $C(0,2)$. Θεωρούμε ως θετικό προσανατολισμό την αντίθετη φορά των δεικτών ωρολογίου. Οι δύο αυτές καμπύλες έχουν αντίθετο προσανατολισμό. Έτσι, $\partial D = C(0,1)^+ \cup C(0,2)^-$. Θεωρούμε την παραμέτρηση $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ και $x(t) =$

[1] $\nabla \cdot (\phi \vec{F}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{F} + \phi(\nabla \cdot \vec{F})$

$\cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$ των $C(0,1)^+$ και $C(0,2)^-$ αντίστοιχα. Τότε, αν $P(x,y) = -y^3 + x$ και $Q(x,y) = x^3 + y$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}(x,y) \cdot d\sigma(D^+) &= \int_{\partial D^+} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy] \\ &= \underbrace{\int_{C(0,1)^+} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]}_{I_1} - \underbrace{\int_{C(0,2)^-} [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]}_{I_2}.\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t + \cos t)(-\sin t)dt + (\cos^3 t + 2\sin t)(\cos t)dt] \\ &= -\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

και

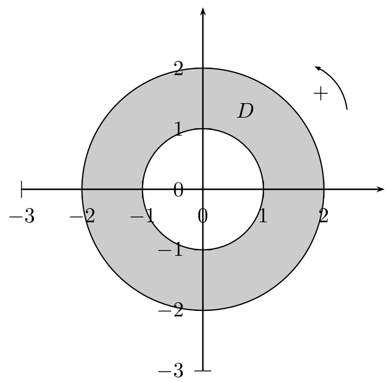
$$\begin{aligned}I_2 &= \int_0^{2\pi} [(-8\sin^3 t + 2\cos t)(-2\sin t) + (8\cos^3 t + 2\sin t)(2\cos t)]dt \\ &= 32\pi.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_{\partial D^+} \overrightarrow{F}(x,y) \cdot d\overrightarrow{r}(t) = \frac{61\pi}{2}.$$

Τώρα, αν έχουμε οτι $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3(x^2 + y^2)$ και άρα

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 3\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = 3\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 r dr dt = \frac{61\pi}{2}.$$



2. Θα υπολογίσουμε το

$$I = \int_\Gamma [P(x,y)dx + Q(x,y)dy],$$

όπου $P(x,y) = y^2 + \sin(x^2)$, $Q(x,y) = \cos y^2 - x$ και $\Gamma = \partial([0,1]\times[0,1])$. Είναι $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3^- \cup \Gamma_4^-$, οπου

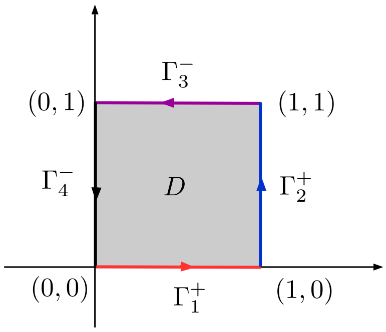
$$\begin{aligned}
\Gamma_1^+ : &\quad (0,0) \dashrightarrow (1,0)\\
\Gamma_2^+ : &\quad (1,0) \dashrightarrow (1,1)\\
\Gamma_3^- : &\quad (1,1) \dashrightarrow (0,1)\\
\Gamma_4^- : &\quad (0,1) \dashrightarrow (0,0).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε οτι παραμετρώντας το $\Gamma_1^+ :\ x = t,\ y = 0,\ t \in [0,1]$, έχουμε οτι

$$\int_{\Gamma_1^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_0^1 \sin(t^2)dt,$$

το οποίο δεν υπολογίζεται. Ομοίως και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα. Αλλά, με τη βοήθεια του τύπου (3.32), το I μπορεί να υπολογιστεί:

$$\begin{aligned}
I &= \int_\Gamma [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\\
&= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (-1-2y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 (-1-2y)\,dxdy\\
&= -2.
\end{aligned}$$



3. (Το παράδειγμα είναι από τη σελίδα Open **Stax** CNX)
Θα επαληθεύσουμε το Θεώρημα του Stokes για το δ.π. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y, 2z, x^2)$ και την επιφάνεια $S = \{x^2 + y^2 = 4 - z\}$.
Η S είναι ενα μονόχωνο παραβολοειδές. Θεωρούμε την παραμέτρηση r της S

$$r(x,y) = (u(x,y), u(x,y), w(x,y)) := (x, x, 4 - x^2 - y^2), \quad (x,y) \in [-2,2]\times[-2,2].$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
curl\overrightarrow{F} &= \nabla\times\overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial(x^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2z)}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial(y)}{\partial z} - \frac{\partial(x^2)}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial(2z)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}\\
&= (-2, -2x, -1)
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$r_x \times r_y = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1)$$

και αρα

$$\begin{aligned} \iint_S \mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot dS &= \iint_S \mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot (r_x \times r_y)\, dA \\ &= \iint_{[-2,2]\times[-2,2]} (-2, -2x, -1) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA \\ &= \iint_{[-2,2]\times[-2,2]} (-4x - 4xy - 1)\, dA \\ &= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (-4x - 4xy - 1)\, dxdy \\ &= -2 \int_{-2}^{2} (4x\sqrt{4-x^2} + \sqrt{4-x^2})\, dx \quad = \quad 4\pi \end{aligned}$$

Από την άλλη, θεωρώντας την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ της καμπύλης C η οποία φράσσει την επιφάνεια S, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &= \int_0^{2\pi} (2\cos t, 0, 4\cos^2 t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 0)\, dt \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = -4\pi \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S \mathrm{curl}\overrightarrow{F} \cdot dS.$$

Ασκήσεις

1. Αν f μια συνάρτηση το $\mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $\nabla^2 f = 0$, να δείξετε οτι

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0,$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ απλό χωρίο.

$\boxed{\textbf{Λύση}}$ Η υπόθεση $\nabla^2 f = 0$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Έχουμε τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy &\overset{(3.32)}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right] dxdy \\
&= \iint_D \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. Αν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι δευτέρας τάξεως και οι οποίες (μερικές παράγωγοι) είναι συνεχείς, να δείξετε οτι

$$\int_{\partial D} \left[\left(-f\frac{\partial g}{\partial y}\right) dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) dy \right] = \iint_D [f\nabla^2 g + (\nabla f \cdot \nabla g)] dxdy,$$

όπου D ένα κυρτό και φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Αν επιπλέον, $\nabla^2 f = 0$ στο D και $f = 0$ στο ∂D, να δείξετε οτι $f = 0$ στο D.

$\boxed{\textbf{Λύση}}$ Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \left[\left(-f\frac{\partial g}{\partial y}\right) dx + \left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) dy \right] &\overset{(3.32)}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-f\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dxdy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right] dxdy \\
&= \iint_D \left[f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right] dxdy \\
&= \iint_D [f\nabla^2 g + (\nabla f \cdot \nabla g)] dxdy.
\end{aligned}$$

Αν επιπλέον, $\nabla^2 f = 0$ στο D και $f = 0$ στο ∂D, τότε η σχέση που μόλις αποδείξαμε μας δίνει $\iint_D \nabla f \cdot \nabla f dxdy = 0$, δηλ. $\iint_D \|\nabla f\|^2 dxdy = 0$ και άρα, από γνωστό Θεώρημα του Α.Λ., έπεται οτι $\nabla f = 0$. Συνεπώς, η f είναι σταθερή στο D και αφού ο περιορισμός της στο ∂D είναι =0, έπεται οτι η f είναι =0 παντού (στο D.)

Θεώρημα 2.5. *Απόκλισης του Gauss*

Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές με κατά τμήματα ομαλό σύνορο ∂D. Τότε αν $\overrightarrow{F}$ είναι ενα συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του D,

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\, d\sigma(x) = \int_D div \overrightarrow{F}\, dx.$$

Εφαρμογή 1 Θα υπολογίσουμε το

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^2 d\sigma(x).$$

Έστω $D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Τότε, $\partial D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (x_1, 0, \ldots, 0)$. Έστω η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 - 1 = 0$. Έχουμε τότε

$$\bigtriangledown \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \ldots 2x_n)$$

και

$$\overrightarrow{V} = \frac{\bigtriangledown \rho}{|\bigtriangledown \rho|}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

και τέλος $\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 1$. Συνεπώς, απ'το Θεώρημα Απόκλισης του Gauss, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^2 d\sigma(x) &= \int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\, d\sigma(x) = \int_D div \overrightarrow{F}\, dx \\ &= \int_D 1\, dx = \operatorname{Vol}(\mathbb{B}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}. \end{aligned}$$

Εφαρμογή 2 Θα υπολογίσουμε το

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^4 d\sigma(x).$$

Έστω $D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Τότε, $\partial D := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$. Έστω το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F} = (x_1^3, 0, \ldots, 0)$. Έστω η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $\rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 - 1 = 0$. Έχουμε τότε

$$\bigtriangledown \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2x_1, 2x_2, \ldots 2x_n)$$

και

$$\overrightarrow{V} = \frac{\bigtriangledown \rho}{|\bigtriangledown \rho|}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

και τέλος

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = 3x_1^2.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^4 d\sigma(x) &= \int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\ d\sigma(x) \overset{\text{Gauss}}{=} \int\limits_{D} div\overrightarrow{F}\ dx \\
&= \int\limits_{D} 3x_1^2\ dx = \int\limits_{\mathbb{B}^n} 3x_1^2\ dx = 3\int\limits_{\mathbb{B}^n} x_1^2\ dx \\
&\overset{\text{Πολικές}}{=} 3\int\limits_{r=0}^{1} \left(\int\limits_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} (ry_1)^2\ d\sigma(y) \right) r^{n-1}\ dr \\
&= 3\left(\int\limits_{r=0}^{1} r^{n+1}\ dr \right) \cdot \left(\int\limits_{y\in\mathbb{S}^{n-1}} y_1^2\ d\sigma(y) \right) \\
&\overset{\text{πρίν}}{=} \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.
\end{aligned}$$

Με όμοιους υπολογισμούς βρίσκουμε οτι

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^6 d\sigma(x) = \frac{5}{n+4} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

Τα ολοκληρώματα $\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} x_1^k d\sigma(x) = 0$, για $1 \leq k \leq n$ περιττό είναι ίσα με μηδέν διότι η συνάρτηση $x \mapsto x_1^k$, είναι περιττή και η $\mathbb{S}^{n-1}$ πάνω στην οποία ολοκληρώνουμε είναι συμμετρική.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί το $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

   I $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^2, xy)$ και C η καμπύλη με παραμέτρηση
   $$\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0,\pi].$$

   II $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ και C η καμπύλη με παραμέτρηση
   $$\overrightarrow{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t),\ t \in [0,1].$$

   III $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ και C η καμπύλη με παραμέτρηση
   $$\overrightarrow{r}(t) = (\sin t, 3\cos t, \sin^2 t),\ t \in [0,\pi/2].$$

2. Δείξτε οτι το δ.π.
   $$\overrightarrow{F}(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big), \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x > 0\})$$
   είναι συντηρητικό και ακολούθως υπολογίστε ένα δυναμικό του.

3. Υπολογίστε το
   $$\int_C xy - x^2 dx + x^2 y dy,$$
   όπου C είναι το σύνορο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(0,0),\ B(0,1)$ και $C(1,1)$.

Λύσεις

1. I Έχουμε
$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &\overset{(3.11)}{=} \int_0^\pi [(2\cos t)^2 (2\cos t)' + (2\cos t)(2\sin t)(2\sin t)']\, dt \\ &= \int_0^\pi [-8\cos^2 t \cdot \sin t + 8\cos^2 t \sin t]\, dt = 0.\end{aligned}$$

   II Έχουμε
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{r})(t) &= \left(\frac{x(t)}{(x^2 t + y^2(t))^{\frac{3}{2}}}, \frac{y(t)}{(x^2 t + y^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \left(\frac{e^t \sin t}{e^{3t}}, \frac{e^t \cos t}{e^{3t}}\right) \\ &= \left(\frac{\sin t}{e^{2t}}, \frac{\cos t}{e^{2t}}\right).\end{aligned}$$

   Έτσι,
$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} &\overset{(3.11)}{=} \int_0^1 \left[\frac{\sin t}{e^{2t}}(e^t \sin t)' + \frac{\cos t}{e^{2t}}(e^t \cos t)'\right] dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{e^t}\, dt = 1 - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

III Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} &\overset{(3.11)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 t(\sin t)' + \sin t(3\sin t)' + 3\sin t(\sin^2 t)']\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [7\sin^2 t\cos t + 3\sin^2 t]\,dt.\end{aligned}$$

Τα πιο πάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται από τους τύπους

$$\int \sin^2 t\cos t\,dt = \frac{\sin^3 t}{3} + c \quad \text{και} \quad \int \sin^2 t\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) + c.$$

IV Το δ.π. $\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy^3, 3x^2y^2)$ είναι ορισμένο σε όλο το $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι και απλά συνεκτικό. Έτσι, αυτό είναι συντηρητικό. Θα βρούμε ένα δυναμικό του, δηλ. μία συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla\phi$, δηλ. $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (2xy^3, 3x^2y^2)$. Έχουμε:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy^3 \Rightarrow \phi(x,y) = \int 2xy^3\,dx + h(y) = x^2y^3 + h(y) \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x^2y^2}{3} + h'(y). \quad (3.37)$$

Αλλά, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 3x^2y^2$ και άρα από την (3.37) έχουμε

$$3x^2y^2 = \frac{x^2y^2}{3} + h'(y) \Rightarrow h(y) = \frac{8}{27}x^2y^3.$$

’ρα, τελικά,

$$\phi(x,y) = x^2y^3 + \frac{8}{27}x^2y^3 = \frac{35}{27}x^2y^3.$$

Τέλος,

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{r} = \int_{A(0,1)}^{B(2,-2)} \nabla\phi\,d\overrightarrow{r} = \phi((2,-2)) - \phi((0,1)) = -\frac{2^5 35}{27}.$$

2. Το πεδιό ορισμού του δ.π. είναι το $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{x > 0\}$ το οποίο είναι απλά συνεκτικό. Έτσι, από το Θεώρημα (2.2), αυτό είναι συντηρητικό. Θα βρούμε ένα δυναμικό του, δηλ. μία συνάρτηση ϕ τάξεως C^1 τέτοια ώστε $\overrightarrow{F} = \nabla\phi$, δηλ. $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad &\Rightarrow \quad \phi(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + h(y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + h(y) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + h'(y). \qquad (3.38)\end{aligned}$$

Έτσι, από την (3.38) και τη δεύτερη συνθήκη $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$, μπορούμε να πάρουμε για h οποιαδήποτε σταθερά συνάρτηση. Έτσι, για $c = 0$, έχουμε ότι την

$$\phi(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (x,y) \in D$$

η οποία είναι (ένα) δυναμικό του δ.π..

3. Είναι $C = C_1^+ \cup C_2^- \cup C_3^-$, όπου ου τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $A(0,0),\ B(0,1),\ C(1,0)$ και $D(1,1)$ με θετικό προσανατολισμό την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Γράφουμε το C: $C = c_1^+ \cup c_2^+ \cup c_3^- \cup c_4^-$, όπου $c_1^+,\ C_2^+, C_3^-$ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $A \to B,\ B \to C$ και $C \to D$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τις παραμετρήσεις των:

$$\begin{aligned} c_1^+ &: \quad \overrightarrow{r}_1(t) = (t,t),\ t \in [0,1] \\ -c_2^- &: \quad \overrightarrow{r}_2(t) = (t,1),\ t \in [0,1] \\ -c_3^- &: \quad \overrightarrow{r}_1(t) = (0,t),\ t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{C_1^+} xy - x^2dx + x^2ydy \quad &= \quad \int_0^1 [(t\cdot t - t^2)\cdot 1 + t^2t\cdot 1]dt = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}, \\ I_2 = \int_{C_2^-} xy - x^2dx + x^2ydy \quad &\overset{(3.12)}{=} \quad -\int_{-C_2^-} xy - x^2dx + x^2ydy \\ &= \quad -\int_0^1 [(t\cdot 1 - 1^2) + t^2\cdot 1\cdot 0]dt \\ &= \quad -\int_0^1 (t-1)dt = \frac{1}{2}, \\ I_3 = \int_{C_3^-} xy - x^2dx + x^2ydy \quad &\overset{(3.12)}{=} \quad -\int_0^1 [(0\cdot t - 0^2)0' + 0^2\cdot t\cdot t']dt \\ &= \quad 0 \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_C xy - x^2dx + x^2ydy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$