Τα πολυώνυμα ως συναρτήσεις

Ορίσαμε τα πολυώνυμα ως *εκφράσεις* μεταβλητών και συντελεστές αυτών πραγματικούς αριθμούς αναγράφοντας δίπλα από το σύμβολο του πολυωνύμου τις μεταβλητές αυτές. Μελετήσαμε επίσης τις ρίζες πολυωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής[1]. Εκτός από τις ρίζες όμως, οι μεταβλητές μπορούν να λάβουν και άλλες τιμές με το αντίστοιχο (αριθμητικό) αποτέλεσμα του πολυωνύμου να είναι διάφορο του μηδενός. Βλέποντας όμως τα πολυώνυμα ως εκφράσεις[2], ο ρόλος των μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτές δε λαμβάνει τη σημασία αυτή. Άλλωστε, η απόδειξη μιας ταυτότητας ανάγεται στο να δείξει κανείς ότι τα δύο μέλη της έχουν την ίδια έκφραση (μορφή). Οδηγούμαστε λοιπόν στη θεώρηση ενός πολυωνύμου σαν συνάρτηση [3].
Έστωσαν οι αλγεβρικές εκφράσεις

$$P(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1} \text{ και } Q(x)=x-5$$

Είναι αυτές "ίσες;"

- Ως **εκφράσεις**, αυτές είναι ίσες, αφού με έναν απλό αλγεβρικό χειρισμό, από την $P(x)$ έπεται η $Q(x)$:

$$P(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}=\frac{(x-5)(x+1)}{x+1}=x-5$$

- Ως **συναρτήσεις**, όμως, αυτές δεν είναι ίσες, αφού $\mathrm{D}(P)=\mathbb{R}-\{-1\}$ ενώ $D(Q)=\mathbb{R}$.

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n ορίζει τη συνάρτηση $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $x\mapsto P(x)$

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Γι'αυτό γράφουμε P αντί $P(x)$ και θεωρούμε το πολυώνυμο ως συνάρτηση. Οι εκφράσεις λοιπόν που αναπαριστούν ένα πολυώνυμο δεν αντανακλούν την ιδιότητα του πολυωνύμου ως συνάρτηση. Μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε 2 ή περισσότερες πολυωνυμικές εκφράσεις με τους γνωστούς κανόνες αλλά το αποτέλεσμα που θα λάβουμε να μην αναπαριστά το αντίστοιχο πολυώνυμο που θα προέκυπτε αν θεωρούσαμε τα αρχικά πολυώνυμα ως συναρτήσεις.

Εδώ όμως προκύπτει το φυσιολογικό ερώτημα

"ποιά σχέση έχουν οι πολυωνυμικές εκφράσεις με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις"

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ορίζουμε ως

$\mathbb{R}[x]$= το σύνολο όλων των πολυωνυμικών εκφράσεων μιας (πραγματικής) μεταβλητής και με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς
και ως

$\mathbb{R}(x)$= το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσων που προκύπτουν από τις πολυωνυμικές αυτές εκφράσεις.

Επίσης, ως πρόσθεση $+$ πολυωνυμικών συναρτήσων f και g ορίζουμε την συνάρτηση $f+g$ με τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ και ως πολλαπλασιασμό $\cdot$ πολυωνυμικών συναρτήσων f και g ορίζουμε την συνάρτηση $f\cdot g$ με τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

[1] Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Ένας αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$ ή $\alpha\in\mathbb{C}$ λέγεται *ρίζα* του $P(x)$ αν $P(\alpha)=0$.
[2] αναφέρονται και ως *φόρμες*
[3] Θα ασχοληθούμε μόνο με πολυώνυμα μιας (πραγματικής) μεταβλητής.

Η **αντιστοιχία** $F: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}(x)$ με $p \mapsto F(p)$ για $p \in \mathbb{R}[x]$ και η οποία (αντιστοιχία) $F(p) \in \mathbb{R}(x)$ ορίζεται ως $x \mapsto [F(p)](x) = p(x)$ [4] είναι:

- **Μια καλά ορισμένη απεικόνιση.** Πράγματι, κάθε πολυωνυμική έκφραση p αντιστοιχεί σε μια και μόνο πολυωνυμική συνάρτηση p (και άρα πολυωνυμική έκφραση$\Rightarrow$ πολυωνυμική συνάρτηση)

- **1-1.** Δηλ. δύο διαφορετικές πολυωνυμικές έκφρασεις δεν μπορούν να αντιστοιχούν στην ίδια πολυωνυμική συνάρτηση (και άρα πολυωνυμική συνάρτηση $\Rightarrow$ πολυωνυμική έκφραση)και διατηρά τη "δομή" των δύο αυτών συνόλων, υπό την έννοια ότι αν προσθέσεις (ή πολλαπλασιάσεις) 2 πολυωνυμικές εκφράσεις και κοιτάξεις τη συνάρτηση που προκύπτει, τότε αυτή θα είναι η ίδια συνάρτηση που προκύπτει αν προσθέσεις (ή αντίστοιχα πολλαπλασιάσεις) τις συναρτήσεις που καθορίζονται από τις 2 αυτές πολυωνυμικές εκφράσεις.

[4] Η F Νοείται ως αντιστοιχία πολυωνυμικών εκφράσεων σε πολυωνυμικές συναρτήσεις