ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ (ΛΕΜΕΣΟΥ) - ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΤΑΞΗ: Β' Προσανατολισμού

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πηγή Θεμάτων: http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/exetastika-dokimia

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1

Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$(\alpha)\ f(x) = e^x - \sigma\upsilon\nu(2x) + 5$

$(\beta)\ h(x) = \dfrac{\ln x}{x}, x > 0$

Προτεινόμενη λύση

(α) Κατ'αρχας, η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x - \sigma\upsilon\nu(2x) + 5$ είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως σύνθεση παντού παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεων) με

$$f'(x) = (e^x - \sigma\upsilon\nu(2x) + 5)' = (e^x)' - \left(\sigma\upsilon\nu(2x)\right)' + (5)' = e^x + (2x)'\eta\mu(2x) + 0 = e^x + 2\eta\mu(2x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Κατ'αρχας, η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο σύνολο αυτό) με

$$h'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

Θέμα 2

Να υπολογίσετε τα όρια:

$(\alpha)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 1}$

$(\beta)\ \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{3x + 6}{x - 2}$

Προτεινόμενη λύση

$$(\alpha)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{-x^2 + 2x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^2}{-x^2} = 5 \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^2} = 5 \lim_{x\to+\infty} (-1) = 5 \cdot (-1) = -5$$

$$(\beta)\ \lim_{x\to2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = \lim_{x\to2^+} \frac{3(x + 2)}{x - 2} = 3 \lim_{x\to2^+} \frac{x + 2}{x - 2} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x + 2}{x - 2} = \dfrac{2 + 2}{2^+ - 2} = \dfrac{4}{0^+} = 4 \cdot \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ (χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές συντμήσεις)

ή

$$\lim_{x\to2^+} \frac{3x + 6}{x - 2} = \lim_{x\to2^+} \frac{3(x + 2)}{x - 2} = 3 \lim_{x\to2^+} \frac{x + 2}{x - 2} = 3 \lim_{x\to2^+} (x + 2) \cdot \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x - 2}$$

και αφού το όριο $\lim_{x\to 2^+}(x+2)$ υπάρχει και είναι ίσο με $2+2=4$ ενώ το όριο $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}$ υπάρχει (στο εκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών) και είναι ίσο με $+\infty$ έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3x+6}{x-2}=+\infty$$

Θέμα 3

Να λύσετε την εξίσωση

$$\log_4(3x+4)=\log_2 x$$

Προτεινόμενη λύση

Καταρχάς, η συνάρτηση $x\mapsto \log_4(3x+4)$ ορίζεται για $3x+4>0$, δηλ. $x>-\frac{4}{3}$ και η $x\mapsto \log_2 x$ ορίζεται για $x>0$. Έτσι, η συνάρτηση

$$x\mapsto \log_4(3x+4)-\log_2 x$$

ορίζεται στο σύνολο $\{x>0\}$ (δηλ. στην τομή των δυο προτέρων συνόλων). Ετσι, για $x>0$ έχουμε (εκ του τύπου αλλαγής βάσης στο λογάριθμο)

$$\log_4(3x+4)=\log_2 x \Leftrightarrow \log_4(3x+4)=\frac{\log_4 x}{\log_4 2}\Leftrightarrow \log_4(3x+4)=\frac{\log_4 x}{\log_4 2}\quad (*)$$

Αλλά,

$$\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{\log_2 2^2}=\frac{1}{2\log_2 2}=\frac{1}{2}$$

και αρα

$(*)\Leftrightarrow \log_4(3x+4)=2\log_4 x \Leftrightarrow \log_4(3x+4)=\log_4 x^2$

$(1-1\ \textit{της λογαριθμικής συνάρτησης}) \Leftrightarrow 3x+4=x^2 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4)=0$

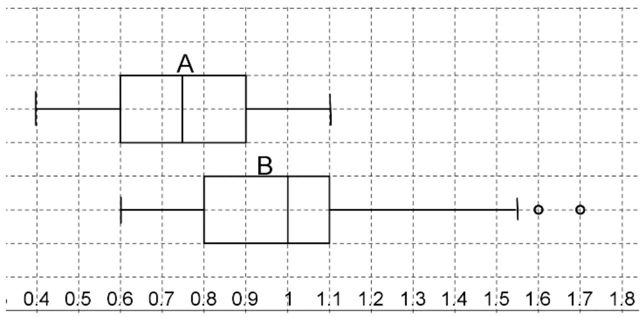
$\Leftrightarrow (x=-1)\vee(x=4)$

Η λύση $x=-1$ δεν ανήκει στο διάστημα $(0,+\infty)$. Έτσι, τελικά, η μόνη λύση που επαληθεύει την εξίσωση είναι η $\boldsymbol{x=4}$.

Θέμα 4

Το διπλανό διάγραμμα παρουσιάζει σε (sec) τους χρόνους αντίδρασης στον κίνδυνο ενός δείγματος οδηγών:

Α. Σε φυσιολογική κατάσταση
Β. Υπό την επήρεια αλκοόλ



(α) Για το διάγραμμα Β να βρείτε:

(i) τις ακραίες παρατηρήσεις

(ii) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος

(β) Για τα διαγράμματα Α και Β:

(i) να βρείτε τη χρονική στιγμή μέχρι την οποία αντιδρούν τα $\frac{3}{4}$ των οδηγών

(ii) να αναφέρετε ποιο από τα δύο είναι συμμετρικό δικαιολογώντας την απάντησή σας

Προτεινόμενη λύση

(α) (i) Οι ακραίες παρατηρήσεις του διαγράμματος (θηκογράμματος) Β είναι οι 1.6 sec και 1.7 sec

(ii) Από το διάγραμμα (θηκόγραμμα) Β έχουμε ότι $Q_1=0.8\,sec$ και $Q_3=1.1\,sec$ και αρα το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR είναι $IQR=Q_3-Q_1=1.1-0.8=0.3\,\text{sec}$

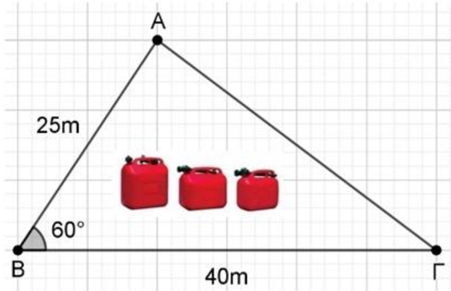
(β) (i) Μας ζητάνε το Q_3 σε κάθε θηκόγραμμα:

στο θηκόγραμμα Α είναι $Q_3 = 0.9\, sec$ και στο θηκόγραμμα Β είναι $Q_3 = 1.1\, sec$. Δηλ. στο διάγραμμα Α τα $\frac{3}{4}$ των οδηγών αντιδρούν σε χρόνο $0.9\, sec$ ενώ στο Β σε χρόνο $1.1\, sec$.

(ii) Το διάγραμμα (θηκόγραμμα) Α είναι συμμετρικό αφού η διάμεσος είναι στο κεντρο του IQR.

Θέμα 5

Μία περιοχή φύλαξης καυσίμων ενός στρατοπέδου έχει σχήμα τριγώνου ΑΒΓ. Στα σημεία Α, Β και Γ τοποθετούνται συσκευές παρακολούθησης, ώστε η συσκευή στο Β να απέχει από τις συσκευές στα Α και Γ αποστάσεις 25 m και 40 m αντίστοιχα. Αν η γωνία με την οποία η συσκευή στο Β παρατηρεί τη συνοριακή γραμμή ΑΓ είναι 60^o, να υπολογίσετε στον πλησιέστερο ακέραιο:



(α) το εμβαδόν της περιοχής φύλαξης των καυσίμων

(β) την απόσταση μεταξύ των συσκευών στα Α και Γ

(γ) τη γωνία με την οποία η συσκευή στο Γ παρατηρεί τη γραμμή ΑΒ

Προτεινόμενη λύση

(α) Έχουμε

$$\boldsymbol{E}_{AB\Gamma} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{B}}{2} = \frac{40 \cdot 25 \cdot \eta\mu 60°}{2} = 20 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \approx 433\, m^2$$

(β) Έχουμε

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B} = 40^2 + 25^2 - 2 \cdot 40 \cdot 25\sigma\upsilon\nu 60° = 1600 + 625 - 1000 = 1225$$

και αρα (αφού $\beta > 0$) $\beta = \sqrt{1225} = 35\, m$.

(γ) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{1600 + 1225 - 625}{2 \cdot 40 \cdot 35} = 0.7857$$

και αρα (αφού $0° < \hat{\Gamma} < 180°$) έχουμε ότι $\boldsymbol{\hat{\Gamma}} \approx \mathbf{38,21}°$

Θέμα 6

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 7^\nu + 5, \quad \nu \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι:

(α) η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και να βρείτε το μέγιστο κάτω φράγμα της

(β) ο αριθμός $(7^\nu + 5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3 , $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Προτεινόμενη λύση

(α) Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Πράγματι, αφού $\forall \nu \in \mathbb{N}$ είναι $7^\nu \geq 7$ και αρα $7^\nu + 5 \geq 7+5=12$, δηλ. $\alpha_\nu \geq 12, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Από αυτό έπεται ότι ο αριθμός 12 (ο οποίος είναι και ο πρώτος όρος της ακολουθίας) είναι **ενα** κάτω φράγμα αυτής και μάλιστα το μέγιστο κάτω φράγμα αυτής.

(β) Θα το δείξουμε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής:

Ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ του οποίου πρέπει να αποδείξουμε την αλήθεια στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ο $P(\nu)$: ο αριθμός $(7^\nu + 5)$ είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλ.

$$P(\nu): \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \alpha \in \mathbb{Z}\ \text{τέτοιος ώστε}\ 7^\nu + 5 = 3\alpha$$

Βήμα 1
Για $\nu = 1$ είναι $7^1 + 5 = 12 = 3 \cdot 4$ και αρα ισχύει, δηλ. ο ο $P(1)$ είναι αληθής.
Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι ο $P(\kappa)$ είναι αληθής για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}, \kappa \geq 2$, δηλ. ότι

$$\text{υπάρχει } \alpha \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } 7^\kappa + 5 = 3\alpha$$

Θα δείξουμε ότι ο προτασιακός τύπος $P(\kappa + 1)$ είναι αληθής, δηλ. ότι

$$\text{υπάρχει } \beta \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιος ώστε } 7^{\kappa+1} + 5 = 3\beta$$

Έχουμε:

$$7^{\kappa+1} + 5 = 7 \cdot 7^\kappa + 5 = 7 \cdot (3\alpha - 5) + 5 = 21\alpha - 30 = 3(7\alpha - 10)$$

και αρα (αφού $(7\alpha - 10) \in \mathbb{Z}$) έπεται ότι ο αριθμός $7^{\kappa+1} + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3

και το αποτέλεσμα ισχύει, δηλ. ο προτασιακός τύπος $P(\kappa + 1)$ είναι αληθής
Βήμα 3

Από την Αρχή της Μαθηματικής επαγωγής, έπεται ότι ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ έχει σύνολο αλήθειας το $\mathbb{N}$.

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \lambda^2 x, x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) + \lambda, x > 1 \end{cases} \quad (\text{όπου } \lambda \in \mathbb{R})$$

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η f είναι συνεχής στο $x = 1$

(β) Για $\lambda = -2$ να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Προτεινόμενη λύση
(α) Η f είναι συνεχής στο $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Είναι $f(1) = 2 \cdot 1^2 - \lambda^2 \cdot 1 = 2 - \lambda^2$
και το όριο $\lim_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ τα (πλευρικά) όρια $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}(2x^2 - \lambda^2 x) = \lim_{x\to 1^+}(3\eta\mu(x-1) + \lambda) \Leftrightarrow 2 - \lambda^2 = 3\eta\mu 0 + \lambda$$

$$\Leftrightarrow 2 - \lambda^2 = +\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 1) \Leftrightarrow (\lambda = -2) \vee (\lambda = 1)$$

(β) Για $\lambda = -2$ η συνάρτηση είναι συνεχής. Θα ελέγξουμε αν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. Η συνάρτηση είναι η

$$f(x) = \begin{cases} 2x(x-2), x \leq 1 \\ 3\eta\mu(x-1) - 2, x > 1 \end{cases}$$

Έχουμε

$$f_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3\eta\mu(x-1) - 2 - (-2)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3\eta\mu(x-1)}{x-1} = 3 \lim_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}$$

Το δε όριο

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και αρα $f_+(1) = 3$). και =+∞.
Επίσης

$$f_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x(x-2) - (-2)}{x - 1} = 2 \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 1} = 2 \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$$= 2 \lim_{x\to 1^-}(x - 1) = 2 \cdot 0 = 0$$

Συνεπώς, η f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο** $x = 1$.

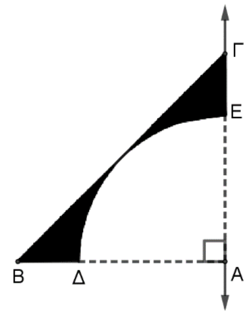
Θέμα 8

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο ($Α = 90^o$) και ισοσκελές και το τεταρτοκύκλιο ΔΕ με κέντρο το Α και ακτίνα $ΑΕ = \sqrt{2}\, cm$ εφάπτεται της ΒΓ. Το σκιασμένο σχήμα ΒΓΕΔΒ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ΑΓ.

Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο και

(β) την ολική επιφάνεια του στερεού που παράγεται



Προτεινόμενη λύση

Αφού το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές, έπεται ότι $\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{45°}$. Συνεπώς,

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \Rightarrow \eta\mu 45° = \frac{ΑΓ}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ΑΓ}{\sqrt{2}} \Rightarrow (ΑΓ) = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1\, cm$$

Έτσι, $ΑΓ = ΑΒ = 1\, cm$. Η πλευρά $ΒΓ$ είναι γενέτειρα λ κώνου. Η βάση R του κώνου είναι η πλευρά $ΑΒ$.

Για των κώνο έχουμε: $R = (ΑΒ) = 1\, cm$ και $\upsilon = (ΑΓ) = 1\, cm$. Επίσης, $\lambda = (ΒΓ) = \sqrt{2}\, cm$. Έτσι,

$$\boldsymbol{V_{κώνου}} = \frac{\boldsymbol{\pi R^2 \upsilon}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{cm^3}\ \ \boldsymbol{και}\ \ \boldsymbol{E_{κώνου}^{κυρτής}} = \boldsymbol{\pi R \lambda} = \boldsymbol{\pi}\sqrt{2}\ \boldsymbol{cm^2}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΔ$ δημιουργεί **δακτύλιο** εμβαδού

$$\boldsymbol{E_{(Δ)}} = \boldsymbol{\pi(ΑΒ)^2 - \pi(ΒΔ)^2}$$

Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε το μήκος της $(ΒΔ)$. Αλλά, το μήκος της $(ΒΔ)$ είναι ίσο με το απόστημα α_4 του αντίστοιχου εγγεγραμμένου τετραγώνου δηλ.

$$(ΒΔ) = \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} cm$$

Έτσι,

$$E_{(Δ)} = \pi 1^2 - \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ cm^2$$

Επίσης, το τεταρτοκύκλιο, κατα την πλήρη περιστροφή του, δημιουργεί ημισφαίριο. Είναι

$$V_{ημισφ.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(ΑΔ)^3 = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6}\pi\ cm^3$$

και

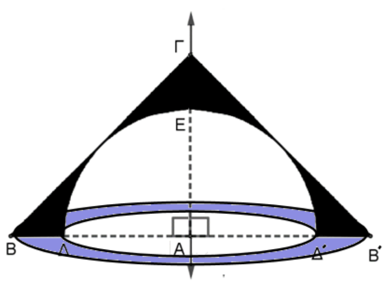
$$E_{ημισφ.}^{κυρτής} = \frac{1}{2}\cdot 4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi\ cm^2$$

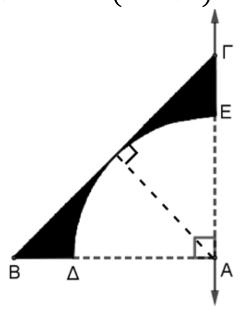
Έτσι, ο όγκος $V_{στερεού}$ του στερεού που παράγεται δίνεται από

$$\boldsymbol{V_{στερεού}} = \boldsymbol{V_{κώνου}} - V_{ημισφ.} = \pi\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}\pi = \frac{5\sqrt{2}}{6}\pi\ \boldsymbol{cm^3}$$

και (β) το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας

$$E_{κυρτής} = E_{ημισφ.}^{κυρτής} + E_{κώνου}^{κυρτής} + E_{(Δ)} = \pi + \boldsymbol{\pi}\sqrt{2} + \pi = \left(2 + \sqrt{2}\right)\pi\ \boldsymbol{cm^2}$$





Θέμα 9

Ένας επιστάτης κατέγραψε σε μία λίστα τις ώρες εργασίας ν εργατών για την εκτέλεση ενός έργου. Παρατήρησε ότι ο κάθε εργάτης εργάστηκε 30 λεπτά λιγότερα από τον αμέσως προηγούμενό του. Αν ο έκτος εργάτης εργάστηκε 9 ώρες, να υπολογίσετε:

(α) τις ώρες εργασίας του πρώτου εργάτη στη λίστα

(β) το μέγιστο αριθμό εργατών που θα μπορούσαν να εργαστούν

(γ) το πλήθος ν των εργατών που τελικά εργάστηκαν, αν το έργο στοίχισε συνολικά €560 για να ολοκληρωθεί και κάθε ώρα εργασίας κόστιζε €8.

Προτεινόμενη λύση

30 λεπτά$=\frac{1}{2}$ ώρες

Ο τυχαίος κ εργάτης ($\kappa = 1,2,\ldots,\nu$) εργάζεται α_κ ώρες. Τότε $\alpha_\kappa = \alpha_{\kappa-1} - \frac{1}{2}$. Έτσι,

$$\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa-1} = -\frac{1}{2}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας (α_κ) σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\delta = -\frac{1}{2}$. Τότε

$$\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\delta \Leftrightarrow 9 = \alpha_1 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha_1 = 11,5\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma}$$

(β) Εντός ποιών χρονικών πλαισίων; Μια απαραίτητη συνθήκη είναι η $\alpha_\nu > 0$. Έχουμε:

$$\alpha_\nu > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-1)\left(-\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \nu < 24$$

Δηλ. αρκούν το πολύ 23 εργάτες.

(γ) Χρειάστηκαν συνολικά

$$\frac{560}{8} = 70\ \acute{\omega}\rho\varepsilon\varsigma$$

Άρα,

$$\sum_\nu = 70 \Leftrightarrow \frac{\nu[2\alpha_1 + (\nu-1)\delta]}{2} = 70 \Leftrightarrow \nu\left[22 + (\nu-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 140$$

$$\Leftrightarrow 22\nu + \frac{1-\nu}{2} = 140 \Leftrightarrow 44\nu + 1 - \nu = 280 \Leftrightarrow 43\nu = 281 \Leftrightarrow \nu = 6.53$$

Τελικά εργάστηκαν 7 εργάτες.

Θέμα 10

Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g

(β) το πεδίο ορισμού της $g - f$.

(γ) τις τιμές των ορίων (αν υπάρχουν):

$$(i) \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad (ii) \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

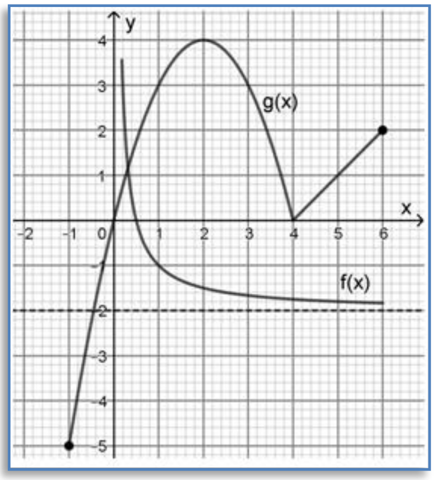
(δ) τις τιμές των συναρτήσεων (αν υπάρχουν):

(i) $g(f(1))$ (ii) $f^{-1}(-1)$

(ε) τις τιμές του x για τις οποίες:

(i) $g'(x) < 0$

(ii) η γραφική παράσταση της g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη



Προτεινόμενη λύση

(α) Είναι $D(f) = (0, +\infty)$ και $R(g) = [-5,4]$

(β) Το πεδίο ορισμού της $g - f$ είναι το $D(f) \cap D(g)$. Έχουμε $D(g) = [-1,6]$ και αρα

$$D(f) \cap D(g) = (0, +\infty) \cap [-1,6] = (0,6].$$

(γ) Είναι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ και

και

$$\lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

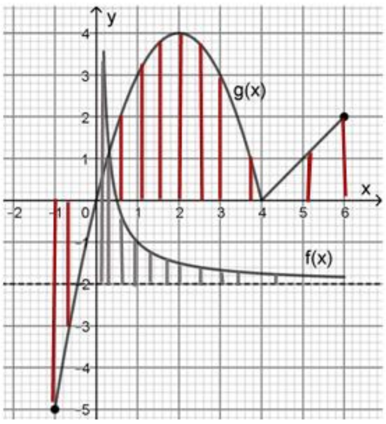
το οποίο δεν υπάρχει, αφού η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 4$.[18]

(δ)

(i) $g\big(f(1)\big) = g(-1) = -5$ και (ii) $f^{-1}\ (-1) = 1$ (το συμμετρικό του $f\ (-1)$ ως προς την ευθεία με εξίσωση $y = x$.

(ε) Είναι $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2,4)$.

(στ) η γραφική παράσταση της g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη sτα σημεία x του π.ο. της στα οποία είναι $g'(x) = 0$. Είναι $g'(x) = 0$ μόνο στο σημείο με $x = 2$, δηλ. το γράφημα της συνάρτησης έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $\big(2, g(2)\big) = (2,4)$.



Μέρος Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1

(α) Αν

$$A = \frac{\eta\mu x + \eta\mu(3x)}{1 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)},$$

να αποδείξετε ότι $A = 2\eta\mu x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση

$$1 - \frac{A}{2} + \frac{A^2}{4} - \frac{A^3}{8} + \frac{A^4}{16} - \cdots = \frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Προτεινόμενη λύση

(α) Έχουμε

[18] Αυστηρότερα:

$$\lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{g(x)-0}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{x-4}$$

και αφού η συνάτηση g είναι φραγμένη σε μια περιοχή του σημείου $x = 4$, έπεται από το γνωστό Θεώρημα

$$\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{x-4} = +\infty$$

$$A=\frac{\eta\mu x+\eta\mu(3x)}{1+\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=\frac{2\eta\mu\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{1+\sigma\upsilon\nu(2x)}=\frac{2\,\overbrace{\eta\mu(2x)}^{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\cdot\sigma\upsilon\nu x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}=2\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2\eta\mu x$$

(β) Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$1-\frac{A}{2}+\frac{A^2}{4}-\frac{A^3}{8}+\frac{A^4}{16}-\cdots=\frac{\tau\varepsilon\mu^4 x}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 1-\frac{2\eta\mu x}{2}+\frac{2^2\eta\mu^2 x}{2^2}-\frac{2^3\eta\mu^3 x}{2^3}+\frac{2^4\eta\mu^4 x}{2^4}-\cdots=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\frac{2\eta\mu x}{2}+\frac{2^2\eta\mu^2 x}{2^2}-\frac{2^3\eta\mu^3 x}{2^3}+\frac{2^4\eta\mu^4 x}{2^4}-\cdots=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\eta\mu x+\eta\mu^2 x-\eta\mu^3 x+\eta\mu^4 x-\cdots=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1-\eta\mu x+\eta\mu^2 x-\eta\mu^3 x+\eta\mu^4 x-\cdots=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+(-\eta\mu x+\eta\mu^2 x-\eta\mu^3 x+\eta\mu^4 x-\cdots)=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 1+((-1)^1\eta\mu x+(-1)^2\eta\mu^2 x+(-1)^3\eta\mu^3 x+(-1)^4\eta\mu^4 x+\cdots)=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

Οι όροι

$$\overbrace{(-1)^1\eta\mu x}^{\alpha_1},\quad \overbrace{(-1)^2\eta\mu^2 x}^{\alpha_2},\quad \overbrace{(-1)^3\eta\mu^3 x}^{\alpha_3},\quad \overbrace{(-1)^4\eta\mu^4 x}^{\alpha_4},\ldots$$

αποτελούν διαδοχικούς όρους Γ.Π.:

$$\left\{\begin{array}{l}{\alpha_2}^2=\eta\mu^4 x\\ \alpha_1\cdot\alpha_3=\eta\mu^4 x\end{array}\right.\Rightarrow {\alpha_2}^2=\alpha_1\cdot\alpha_3$$

Ο λόγος λ της προόδου είναι

$$\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=-\eta\mu x$$

Επίσης, αφού $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι $|\lambda|=|-\eta\mu x|=|\eta\mu x|<1$ και αρα έχει νόημα το $\sum_\infty$ και

$$\sum\nolimits_\infty=\frac{\alpha_1}{1-\lambda}=\frac{-\eta\mu x}{1-(-\eta\mu x)}=\frac{-\eta\mu x}{1-(-\eta\mu x)}=-\frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu x}$$

Έτσι, η εξίσωσή μας είναι ισοδύναμη με την

$$1-\frac{\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=\frac{\tau\varepsilon\mu^4 x}{2},\quad \delta\eta\lambda.\quad \frac{1}{1+\eta\mu x}=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}$$

Αλλά, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu x>0\Rightarrow\tau\varepsilon\mu x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}>0$ και $1+\eta\mu x\neq 0$ και αρα

$$\frac{1}{1+\eta\mu x}=\frac{\tau\varepsilon\mu^2 x}{2}\Leftrightarrow\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1-\eta\mu^2 x}{1+\eta\mu x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{(1-\eta\mu x)(1+\eta\mu x)}{1+\eta\mu x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

(στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$)

Θέμα 2

Σε δύο ασθενείς Α και Β χορηγήθηκε την ίδια χρονική στιγμή ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Οι θερμοκρασίες σώματος (σε $^{o}\mathrm{C}$) των δύο ασθενών, t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\theta_A(t)=35+5\cdot 2^{-t}\quad\text{και}\quad\theta_B(t)=36+4\cdot 2^{-2t},\qquad \theta\in[0,4]$$

Να υπολογίσετε τη διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος του ασθενούς Β από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t=1$.

Να βρείτε τις χρονικές στιγμές στις οποίες οι δύο ασθενείς έχουν την ίδια θερμοκρασία σώματος.

Αν η φυσιολογική θερμοκρασία του ανθρωπίνου σώματος είναι 36°C:

(i) να εξετάσετε ποιου εκ των δύο ασθενών η θερμοκρασία θα φτάσει στη φυσιολογική

(ii) να βρείτε τη χρονική στιγμή που θα συμβεί αυτό

(Η απάντησή σας να δοθεί με προσέγγιση δεκάτου)

Προτεινόμενη λύση

(α) Ζητάμε τη διαφορά $\theta_B(1)-\theta_B(0)$. Είναι

$$\begin{cases} \theta_B(1) = 35 + 5 \cdot 2^{-1} = 35 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{75}{2} \\ \theta_B(0) = 35 + 5 \cdot 2^{0} = 35 + 5 = 40 \end{cases} \Rightarrow \theta_B(1) - \theta_B(0) = \frac{75}{2} - 40 = -\frac{5}{2}$$

δηλ. μεταξύ των χρονικών στιγμών $t=0$ και $t=1$ η θερμοκρασία του ασθενούς Β έπεσε κατα 2.5 °C.

(β) Είναι

$$\theta_A(t) = \theta_B(t) \Leftrightarrow 35 + 5 \cdot 2^{-t} = 36 + 4 \cdot 2^{-2t} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{-t} - 4 \cdot 2^{-2t} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 \cdot 2^{-2t} - 5 \cdot 2^{-t} + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot (2^{-t})^2 - 5 \cdot 2^{-t} + 1 = 0$$

Θεωρούμε τον 1-1 (αντιστρέψιμο) μετασχηματισμό $w = 2^{-t}$. Τότε η πιο πάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$4 \cdot w^2 - 5 \cdot w + 1 = 0$$

δηλ. την

$$(4w-1)(w-1) = 0$$

η οποία έχει λύσεις τις $w = \frac{1}{4}$ και $w = 1$. Επιστρέφουμε (αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό) στην αρχική μεταβλητή:

$$w = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-t} = 2^{-2} \Leftrightarrow -t = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{t = 2}$$

και

$$w = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = 2^{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{t = 0}$$

δηλ. τις χρονικές στιγμές $\boldsymbol{t=0}$ και $\boldsymbol{t=2}$ οι δυο ασθενείς είχαν τις ίδιες θερμοκρασίες.

(γ) Ο ασθενής B δεν μπορεί να φτάσει ποτέ τη φυσιολογική θερμοκρασία αφού η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει είναι η τιμή για $\boldsymbol{t=0}$**:**

$$\forall t \in [0,4], \qquad 4 \cdot 2^{-2t} > 0 \Rightarrow 36 + 4 \cdot 2^{-2t} > 36 = \theta_B(0)$$

Ο ασθενής A όμως:

$$35 + 5 \cdot 2^{-t} = 36 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{-t} = 1 \Leftrightarrow 2^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_2 2^{-t} = \log_2 5^{-1} \Leftrightarrow -t = -\log_2 5$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{t = \log_2 5 \approx 2.32}$$

Θέμα 3 (εναλλακτική εκφώνηση)

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x} \qquad \text{και} \quad h(x) = x^2 - 2x, x \in [1, +\infty]$$

αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(γ) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της h υπάρχει και να την ορίσετε

Προτεινόμενη λύση

(α) Είναι $D(f)=\{1-x^2\geq 0\}$. Λύνουμε την ανίσωση $1-x^2\geq 0$ (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών). Είναι $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x)\geq 0$. Κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου: (ξεκινάμε με - από τα δεξιά, όπως είναι το πρόσημο του x^2)

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
πρόσημο $1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

και αρα $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$. Η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της:

- Για κάθε $x\in D(f)=[-1,1]$, είναι $(-x)\in D(f)$. Πράγματι, αν $x\in[-1,0]$, τότε $(-x)\in[0,1]$ το οποίο σύνολο είναι υποσύνολο του $D(f)=[-1,1]$. Ομοίως, αν $x\in[0,1]$, τότε $(-x)\in[-1,0]$ το οποίο σύνολο είναι υποσύνολο του $D(f)=[-1,1]$.

- Γα κάθε $x\in D(f)=[-1,1]$,
$$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

(β) Το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$ είναι το υποσύνολο εκείνο του $D(f)\cap D(g)$ στο οποίο οι τύποι των δυο συναρτήσεων συμφωνούν. Όπως ακριβώς με το $D(f)$, βρίσκουμε ότι $D(g)=[-1,1]-\{0\}$ και αρα
$$D(f)\cap D(g)=[-1,1]-\{0\}=[-1,0)\cup(0,1]$$
και για $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ έχουμε
$$g(x)=\frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1-x^2)}}{x}=\frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{x}$$
Έτσι,
$$g(x)=\frac{|x|\sqrt{1-x^2}}{x}=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{x}, & x\in(0,1]\\[2ex] \dfrac{-x\sqrt{1-x^2}}{x}, & x\in[-1,0)\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in(0,1]\\ -\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0)\end{cases}$$
και αρα $f(x)=g(x)$ στο σύνολο $(0,1]\cup\{-1\}$ (μην ξεχνάτε πως αποδείξαμε ότι η f είναι άρτια).

(γ) Έχουμε
$$\begin{aligned} y\in R(h) &\Leftrightarrow \exists x\in D(h): h(x)=y\\ &\Leftrightarrow \exists x\in[1,+\infty]: x^2-2x=y\\ &\Leftrightarrow \exists x\in[1,+\infty]: x^2-2x-y=0\end{aligned}$$
Είναι δε $x^2-2x-y=0\Leftrightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{y+1}$. Έτσι, $\exists x\in[1,+\infty]: x^2-2x-y=0\Leftrightarrow y\geq -1$ δηλ. $R(f)=[-1,+\infty)$ και μάλιστα αφού
$$y\geq -1\Leftrightarrow \sqrt{y+1}\geq 0\Leftrightarrow 1+\sqrt{y+1}\geq 1$$
έπεται ότι η h είναι 1-1. Συνεπώς, η h είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την
$$h^{-1}:[-1,+\infty)\to[1,+\infty) \ \ με\ \ h^{-1}(y)=1+\sqrt{y+1}$$

Θέμα 4

Από σημείο Σ που βρίσκεται εξωτερικά ενός κύκλου (O, R) φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και $ΣΒ=R\sqrt{3}$, όπου Α, Β σημεία του κύκλου. Με διάμετρο τη χορδή ΑΒ γράφουμε ημικύκλιο εντός του κύκλου (O, R). Να βρείτε, συναρτήσει του R,

(α) το εμβαδόν και (β) την περίμετρο του μηνίσκου που σχηματίζεται

Προτεινόμενη λύση

(α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AK\Sigma$ $(A\widehat{K}\Sigma = 90°)$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi\widehat{K_1} = \frac{A\Sigma}{KA} = \frac{R\sqrt{3}}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{K_1} = 60°$$

Αλλά, τα τρίγωνα $AK\Sigma$ και $BK\Sigma$ είναι ίσα (Π-Π-Ο) και αρα $\widehat{K_1} = \widehat{K_2} = 60°$. Συνεπώς, $\widehat{K} = 120°$. Προκύπτει λοιπόν ότι $KO = \alpha_3 = \frac{R}{2}$ και $AB = \lambda_3 = R\sqrt{3}$, οπόταν το τρίγωνο $AB\Sigma$ είναι ισόπλευρο. Έτσι, $K\hat{B}A = K\hat{A}B = 30°$. Έχουμε λοιπόν

$$E_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda\ \acute{\iota}o\upsilon} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi R^2}{8} \quad \kappa\alpha\iota\ E_{\Delta\ AKB} = E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

Επίσης,

$$E_{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o\upsilon\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ AB} = E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\ AB} - E_{\Delta\ AKB} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi R^2}{3}$$

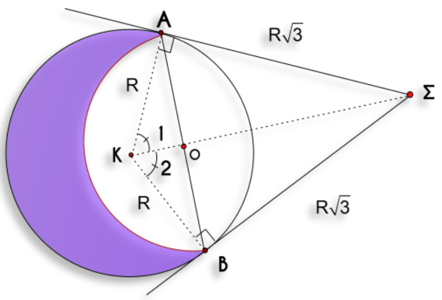
και αρα

$$E_{\mu\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} = E_{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o\upsilon\ \kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ AB} - E_{\eta\mu\iota\kappa\upsilon\kappa\lambda\ \acute{\iota}o\upsilon\ AB}$$

$$= \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2\pi R^2}{3} - \frac{3\pi R^2}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7\pi R^2}{24} = \frac{R^2}{24}\left(6\sqrt{3} + 7\pi\right)\tau.\mu.$$

(β)

$$\Pi_{\mu\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} = \gamma_{\widehat{AB}\ \mu\iota\kappa\rho\acute{o}} - \gamma_{\widehat{AB}\ \mu\varepsilon\gamma\alpha\lambda o} = \frac{R\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{240°}{360°}2\pi R = \frac{R\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{4}{3}\pi R = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\right)\pi R = \left(3\sqrt{3} + 8\right)\frac{\pi R}{6}$$



Θέμα 5

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να δείξετε ότι $f(1) = f'(1) = 2$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x = 1$.

(γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα XX' τουλάχιστον σε ένα σημείο στο διάστημα $(-1,1)$

Προτεινόμενη λύση

(α) Η f είναι παντού παραγωγίσιμη και αρα η f' υπάρχει παντού. Έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x^2) + x \cdot f(x) = 4x^2 \Rightarrow \left(f(x^2) + x \cdot f(x)\right)' = (4x^2)' \Rightarrow \left(f(x^2)\right)' + \left(x \cdot f(x)\right)' = 8x$$

$$\Rightarrow (x^2)' \cdot f'(x^2) + x' \cdot f(x) + x \cdot f'(x) = 8x$$

$$\Rightarrow 2xf'(x^2) + f(x) + x \cdot f'(x) = 8x$$

$$(για\ x=1) \qquad \Rightarrow \quad 2f'(1)+f(1)+1\cdot f'(1)=8$$

$$\Rightarrow \quad 3f'(1)+f(1)=8$$

Για $x=1$ στην αρχική μας εξίσωση: $f(1)+f(1)=4 \Rightarrow 2f(1)=4 \Rightarrow f(1)=2$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην προηγούμενη σχέση:

$$\begin{cases} 3f'(1)+f(1)=8 \\ \\ f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow 3f'(1)+2=8 \Rightarrow f'(1)=2$$

(γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με $x=1$ είναι η

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1), \qquad δηλ.η\ \ y-2=2\cdot(x-1), \qquad δηλ.η\ \ y=2x$$

(δ) Ισοδύναμα, θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,1)$. (Προφανώς) έχουμε

$$\begin{cases} f(x^2)+x\cdot f(x)=4x^2 \\ \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow f(0)+0\cdot f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0.$$

[αυτό το σκεφτήκαμε λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο συμμετρικό περί του μηδενός διαστήματος $[-1,1]$]

◩ Με χρήση του Θεωρήματος του Bolzano:

$$\begin{cases} f(x^2)+x\cdot f(x)=4x^2 \\ \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{f(1)}_{2}-f(-1)=4 \Rightarrow f(-1)=-2$$

και αφού $f(-1)<0$, $f(1)=2>0$ και λόγω της συνέχειας της συνάρτησης στο διάστημα $[-1,1]$, έπεται από το Θεώρημα του Bolzano ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,1)$.