Το Πρόβλημα της εύρεσης ενός μη-τετριμμένου αναλλοίωτου υποχώρου

(i) Έστω X ένας (μιγαδικός) χώρος Banach διάστασης ≥ 2. Έστω $T : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Το ερώτημα είναι πότε υπάρχει ένας κλειστός υποχώρος A του X τέτοιος ώστε $T(A) \subseteq A$. Στην περίπτωση που τέτοιος υποχώρος υπάρχει, τότε αυτός λέγεται αναλλοίωτος υποχώρος του X.

(ii) Έστω $T : X \to X$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, υπάρχουν δύο τετριμμένοι αναλλοίωτοι υπόχωροί του, ο μηδενικός $\{0\}$ και ο ίδιος ο χώρος X.

(iii) Το Πρόβλημα της εύρεσης ενός μη-τετριμμένου αναλλοίωτου υποχώρου A του X, είναι το 'Πρόβλημα εύρεσης αναλλοίωτου υποχώρου'. Το ερώτημα αυτό τέθηκε πρώτα από τον von Neumann για την ειδική περίπτωση που ο X είναι ένας χώρος Hilbert. Το ερώτημα στην περίπτωση αυτή παραμένει ανοικτό. Αν ο χώρος X είναι χώρος Hilbert, μη-διαχωρίσιμος (δηλ. έχει μια υπεραριθμήσιμη ορθοκανινική βάση), τότε η απάντηση είναι θετική. Συγκεκριμένα, αν $x \in H,\ x \neq 0$, τότε ο χώρος $\overline{\{T_n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \}}$ είναι διαχωρίσιμος άρα κανονικός υπόχωρος και άρα αναλλοίωτος. Σε μή μηδενικούς διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμικός τελεστής κατέχει ένα ιδιοδιάνυσμα και άρα αυτός έχει έναν 1-διάστατο αναλλοίωτο υπόχωρο. Ο von Neumann απέδειξε οτι κάθε συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert διάστασης ≥ 2, έχει έναν μη-τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο. Το φασματικό Θεώρημα μας λέει επίσης οτι όλοι οι κανονικοί τελεστές κατέχουν μη τετριμμένους αναλλοίωτους υποχώρους. Όταν ο X είναι χώρος Banach, τότε η απάντηση είναι αρνητική. ([1],[2])

(iv) (Α΄) Ο A είναι υπόχωρος του X. Πράγματι, ο $A \neq \emptyset$, αφού $x \in A$. Τώρα, αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^n x \in A$, έπεται οτι

$$\lambda u = \lambda \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^n x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda c_n T^n x \in A,$$

δηλ. $\lambda u \in A$. Τέλος, αν $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^n x \in A$ και $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n T^n x \in A$, έχουμε οτι

$$u + v = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^n x + \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n T^n x = \sum_{n\in\mathbb{N}} (c_n + d_n) T^n x \in A.$$

Τέλος, ας παρατηρήσουμε οτι $x = 0 \Leftrightarrow A = \{0\}$, λόγω του ότι η T είναι γραμμική ($\Rightarrow T(0) = 0$).

(Β΄) Έστω $y \in T(A) = \{y \in X\ ;\ y = T(a),\ \text{για κάποιο } a \in A\}$. Τότε,

$$y = T\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^n x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n T^{n+1} x \in A.$$

Έτσι, $T(A) \subseteq A$.

(Γ΄) Ο A είναι κλειστός, αφού $\overline{A} = A$.

(v) Έστω $x \in X,\ x \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο A του προηγούμενου ερωτήματος. Το $x \in A = \overline{\{T^n x\ :\ n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\{x, Tx, T^2x, \ldots\}}$ και άρα $A \neq \{0\}$. Επίσης, αφού ο X είναι μη-διαχωρίσιμος (έχει μη αριθμήσιμη βάση) ενώ ο A είναι διαχωρίσιμος, έπεται οτι $A \neq X$. Επιπλέον, στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε οτι ο A είναι αναλλοίωτος υπόχωρος του X. Έτσι, ο A είναι ένας μη-τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος του X.

Βιβλιογραφία

[1] Bernard Beauzamy - *Introduction to operator theory and invariant subspaces,* (1988) Introduction to operator theory and invariant subspaces, North-Holland Mathematical Library 42, Amsterdam: North-Holland, ISBN 978-0-444-70521-1, MR 967989

[2] BAbramovich, Yuri A.; Aliprantis, Charalambos D. - (2002), An Invitation to Operator Theory, Graduate Studies in Mathematics 50, Providence, RI: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-2146-6, MR 1921782