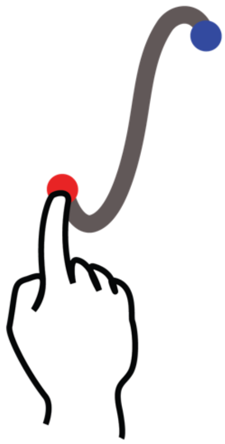
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37) (12 06 2020)

21 Ιουνίου 2020

http://ioakimioannis.com



ΜΕΡΟΣ Β

Άσκηση Β1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{(x-2)^2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Εύρεση του π.ο.: Η f είναι το πηλίκο των συναρτήσεων $g(x) = e^x$ και $h(x) = (x-2)^2$. Είναι $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και $h(x) = 0 \iff x - 2 = 0 \iff x = 2$. Συνεπώς, $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Εύρεση των σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων: Αφού $e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. το γράφημα της f δεν τέμνει τον άξονα των τετμημένων. Έχουμε:

$$f(0) = \frac{e^0}{(0-2)^2} = \frac{1}{4}$$

και αρα το γράφημα της f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και τοπικά ακρότατα: Η συνάρτηση f είναιπ αραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot (x-2)^2 - e^x \cdot [(x-2)^2]}{(x-2)^4} \\ &= \frac{e^x \cdot (x-2)^2 - 2(x-2)e^x}{(x-2)^4} = \frac{e^x(x-2) \cdot (x-2-2)}{(x-2)^4} \\ &= e^x \frac{x-4}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

Τα κρίσιμα σημεία[4] της συνάρτησης f είναι τα σημεία στα οποία $f'(x) = 0$ και στα οποία η f' δεν ορίζεται. Είναι

$$f'(x) = 0 \iff e^x(x-4) = 0 \iff x - 4 = 0 \iff x = 4.$$

Η f' δεν ορίζεται στο $x = 2$. Μελετούμε το πρόσημο της f' στα διαστήματα $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$ και $(4, +\infty)$:

• Είναι $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty, 2)$ και αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

• Είναι $f'(x) < 0$, $\forall x \in (2, 4)$ και αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (και λόγω στη συνέχειας της f στο $x = 4$, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, 4]$) και αφού $f'(x) > 0$, $\forall x \in (4, +\infty)$ και αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (και λόγω της συνέχειας της f στο $x = 4$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$) Αφού επιπλέον $f'(4) = 0$, από το κριτήριο της πρώτης παραγώγου[5], έπεται ότι το γράφημα C_f της f λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(4, f(4)) = \left(4, \frac{e^4}{4}\right)$.

[4] Το Θεώρημα του Fermat, μας οδηγεί στη μελέτη των σημείων στα οποία η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη είτε είναι και η παράγωγός της μηδενίζεται. Τα εν λόγω σημεία φέρουν την ονομασία κρίσιμα σημεία και αυτά είναι τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης. Στην ειδική περίπτωση που για ενα κρίσιμο σημείο x_0 είναι $f'(x_0) = 0$, αυτό θα λέγεται στάσιμο σημείο και η ονομασία αυτή δικαιολογείται ακριβώς από το ότι στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε μεταβολή στο γράφημα της συνάρτησης.

[5]

Εύρεση ασύμπτωτων: Ελέγχουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της f αριστερά και δεξιά του $x = 2$: Έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-} e^x = e^2 \quad (\text{λόγω της συνέχειας της } x \mapsto e^x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} (x-2)^2 = 0$$

και αφού $x - 2 \neq 0, \forall x < 2$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^x}{(x-2)^2} = +\infty$$

Ομοίως,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Συνεπώς, η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος C_f της f.
Ελέγχουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της f στο $\pm\infty$: Δυο φορές εφαρμογή κανόνα του de L'H-opital δίνει

$$+\infty = \frac{1}{2}\cdot(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d^2 e^x}{dx^2}}{\frac{d^2}{dx^2}((x-2)^2)} = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{(x-2)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0\cdot 0 = 0$$

Έτσι, ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη του γραφήματος C_f της f στο $-\infty$.

Για την ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

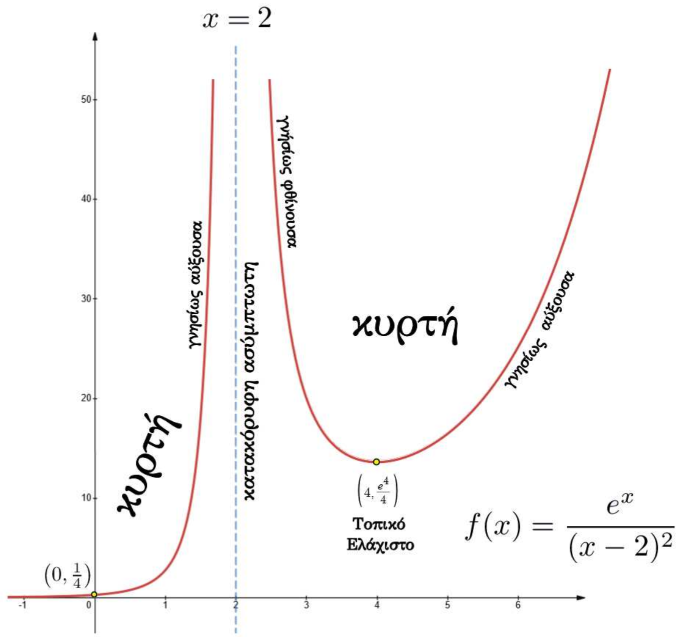
και αρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Επιπλέον, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$[6].
Για να χαράξουμε (σωστά) τη γραφική παράσταση της f, τη μελετάμε και ως προς την **κυρτότητα**:
Είναι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$:

$$f''(x) = \frac{e^x\cdot(x^2 - 8x + 18)}{(x-2)^4}$$

και αφού $x^2 - 8x + 18 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, έπεται ότι $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ και αρα η f είναι παντού κυρτή στο π.ο. της.

Θεώρημα 0.3 (Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου). *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ενα κρίσιμο σημείο της, x_0. Έστω $\delta > 0$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$. Τότε:*
Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ισχύει $f'(x) < 0$, τότε η f λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο x_0.
Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ισχύει $f'(x) < 0$ και $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ ισχύει $f'(x) > 0$, τότε η f λαμβάνει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0
Αν $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ ισχύει $f'(x) > 0$ ή $f'(x) < 0$, τότε η f δε λαμβάνει ακρότατο στο σημείο x_0

[6] Είδαμε ότι έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$



Σχήμα 2: Άσκηση 1/Μέρος Β

Άσκηση Β2

Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 5$ και $C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$.
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κάθε κύκλου και να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κάθε κύκλου.

(β) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου A που ανήκει στον κύκλο C_1, για το οποίο ισχύει $\Delta_{C_1}(A) = \Delta_{C_2}(A)$.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) του κύκλου C_1 στο σημείο του $B(1, -2)$ και να αποδείξετε ότι η (ϵ) εφάπτεται και στον κύκλο C_2.

Λύση

(α) Είναι

$$C_1 : x^2 + y^2 = 5 \iff C_1 : (x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2$$

και αρα ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το σημείο $K(0,0)$ και ακτίνα $R_1 = \sqrt{5}$ μονάδες. Επίσης,

$$\begin{aligned} C_2 : x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0 \quad &\iff \quad C_2 : (x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 4y + 4) - 5 = 0 \\ &\iff \quad C_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2 \end{aligned}$$

και αρα ο κύκλος C_2 έχει κέντρο το σημείο $\Lambda(4,2)$ και ακτίνα $R_2 = \sqrt{5}$ μονάδες[7].

[7]Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο κύκλος C_2 είναι μια ομοιοθεσία (μεταφορά) του κύκλου C_1

(β) Είναι $R_1 = R_2 = \sqrt{5}$ μονάδες. Η διάκεντρος δ των δυο κύκλων έχει μήκος

$$\delta = |K\Lambda| = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} = 2R_1 = 2R_2$$

και αρα οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. Αφού $R_1 = R_2$, το σημείο επαφής E θα είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $(K\Lambda)$:

$$x_E = \frac{x_K + x_\Lambda}{2} = \frac{0+4}{2} = 2 \qquad \text{και} \qquad y_E = \frac{y_K + y_\Lambda}{2} = \frac{0+2}{2} = 1,$$

δηλ. $E(2,1)$.[8]

(γ) Είναι $\Delta_{C_1}(A) = 0$, αφού το σημείο A ανήκει στον κύκλο C_1. Έτσι, $\Delta_{C_1}(A) = \Delta_{C_2}(A) \iff \Delta_{C_2}(A) = 0$ και αρα το σημείο A ανήκει και στον κύκλο C_2. Όμως, αυτό είναι το σημείο $E(2,1)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

(δ) Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x) την εξίσωση του κύκλου C_1 :

$$x^2 + y^2 = 5 \iff 2x + 2yy' = 0 \iff y' = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Άρα, η κλίση $\lambda_{(\epsilon)}$ της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο $B(1,-2)$ είναι η

$$\lambda_{(\epsilon)} = -\frac{x_B}{y_B} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

και η αντίστοιχη εξίσωση η $(\epsilon) : y - (-2) = \frac{1}{2}(x-1)$, δηλ. η

$$(\epsilon) : 2y - x + 5 = 0$$

Τώρα, αφού $\lambda_{K\Lambda} = \frac{1}{2} = \lambda_{(\epsilon)}$ και $R_1 = R_2$ αλλά και η (ϵ) εφάπτεται του C_1, έπεται ότι η ευθεία αυτή τα εφάπτεται και του C_2 .[9]

Άσκηση Β3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και σημείο της $B(k, \lambda)$, όπου $k > 0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο B, τέμνει το θετικό ημιάξονα Oy στο σημείο A. Στο θετικό ημιάξονα Ox παίρνουμε σημείο Γ, τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $OAB\Gamma$ να είναι τραπέζιο.

(α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(k)$ του τραπεζίου $OAB\Gamma$ δίνεται από τη σχέση

$$E(k) = \frac{1}{2}k(k+2)e^{-k}$$

(β) Να βρείτε την τιμή του k, για την οποία το εμβαδόν $E(k)$ γίνεται μέγιστο.

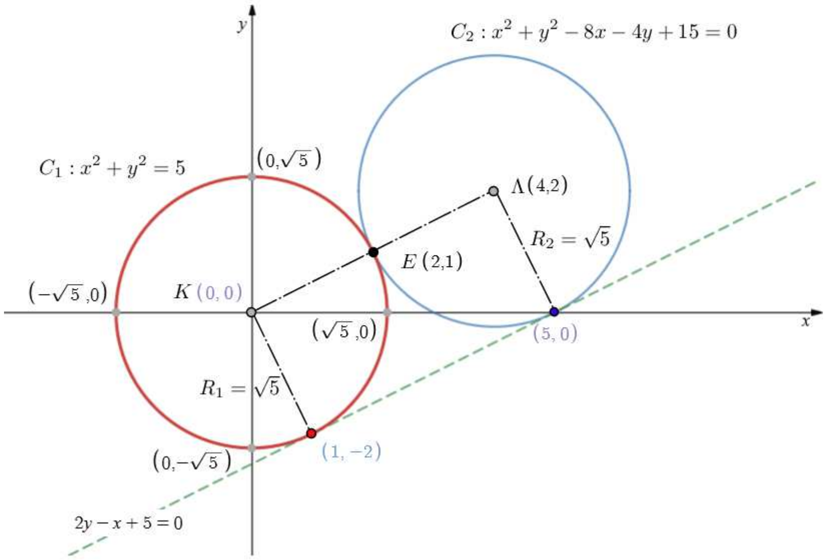
---

[8] Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη γενικότερη μέθοδο, την επίλυση συστήματος των εξισώσεων των 2 κύκλων

[9] Εναλλακτικά, υπολογίζουμε την απόσταση $d(\Lambda, (\epsilon))$:

$$d(\Lambda, (\epsilon)) = \frac{|2 \cdot 2 - 4 + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = R_2$$

Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε τα σημεία τομής του κύκλου C_2 με τον άξονα των τετμημένων (ενα από τα δυο σημεία είναι το $M(5,0)$, το οποίο ανήκει στην ευθεία (ϵ)) και να δείξουμε ότι $\Lambda M| = \sqrt{5} = R_2$.



Σχήμα 3: Άσκηση 2/Μέρος Β

Λύση

$B(k,\lambda) \in C_f \Longrightarrow f(k) = \lambda \Longrightarrow e^{-k} = \lambda$

• Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $B(k,\lambda)$:

$$y = e^{-x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{-x} = -y \Longrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi.} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{B(k,\lambda)} = -f(k) = -\lambda = -e^{-k}.$$

Συνεπώς, (εφ.) : $y - e^{-k} = -e^{-k}(x-k)$, της οποίας πολλαπλασιάζουμε αμφότερα μέλη με $e^k > 0$ και παίρνουμε:

$$(\varepsilon\varphi.) : e^k y + x - k - 1 = 0. \tag{1}$$

• Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου A :
Θέτουμε $x = 0$ στην (1) και παίρνουμε $e^k y = k+1$, δηλ. $y = e^{-k}(k+1)$. Έτσι, $A(0, e^{-k}(k+1))$.
Για να είναι τραπέζιο το τετράπλευρο $OAB\Gamma$, πρέπει $B\Gamma \| Oy$, δηλ. αν και μόνο αν $y_\Gamma = 0$ και $x_\Gamma = x_B = k$. Έτσι, $\Gamma(k,0)$.

(α) Είναι[10]

$$\begin{aligned} E_{OAB\Gamma} &= \frac{[(OA)+(B\Gamma)]\cdot(O\Gamma)}{2} = \frac{(y_A + y_B)\cdot x_\Gamma}{2} \\ &= \frac{(e^{-k}(k+1) + e^{-k})\cdot k}{2} \\ &= \frac{1}{2}k\cdot(k+2)e^{-k} \end{aligned}$$

[10]Εμβαδόν τραπεζίου $= \dfrac{(\text{βάση } 1 + \text{βάση } 2)\cdot \text{ύψος}}{2}$

(β) Θεωρούμε τη **συνάρτηση** (εμβαδού)

$$E : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad \text{με} \qquad E(k) = \frac{1}{2}k \cdot (k+2)e^{-k}$$

Είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} E'(k) &= \frac{1}{2}\left((k^2+2k)e^{-k}\right)' = \frac{1}{2} \cdot [(k^2+2k)' \cdot e^{-k} + (k^2+2k) \cdot (e^{-k})'] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [2(k+1) \cdot e^{-k} - (k^2+2k) \cdot e^{-k}] \\ &= \frac{e^{-k}}{2} \cdot [2k + 2 - k^2 - 2k] \\ &= \frac{e^{-k}}{2} \cdot (2 - k^2) \end{aligned}$$

Είναι

$$E'(k) = 0 \iff k^2 - 2 = 0 \iff k = \pm\sqrt{2} \quad \overset{k>0}{\iff} \quad k = \sqrt{2}.$$

(το $k = \sqrt{2}$ είναι κρίσιμο σημείο). Έχουμε:[11]

• $2 - k^2 > 0, \ \forall k \in (0, \sqrt{2}) \implies E'(k) > 0, \ \forall k \in (0, \sqrt{2})$ και αρα η E είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

• $2 - k^2 < 0, \ \forall k \in (\sqrt{2}, +\infty) \implies E'(k) < 0, \ \forall k \in (\sqrt{2}, +\infty)$ και αρα η E είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα, από το Κριτήριο της 1ης παραγώγου, η E λαμβάνει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\sqrt{2}, E(\sqrt{2}))$. Όμως, αφού

$$\lim_{k\to 0^+} E(k) = \frac{1}{2} \lim_{k\to 0^+} k(k+2)e^{-k} = 0$$

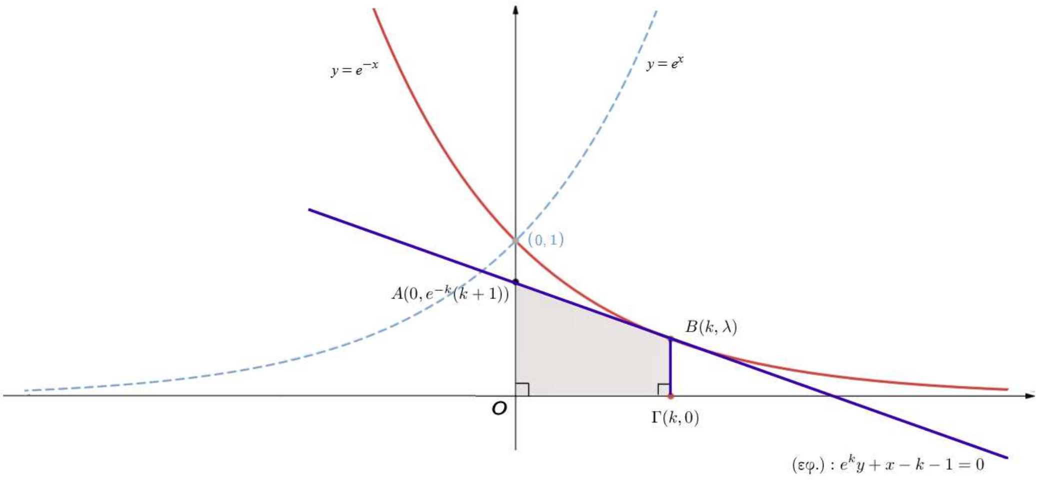
και[12]

$$\lim_{k\to +\infty} E(k) = \frac{1}{2} \lim_{k\to +\infty} \frac{k^2+2k}{e^k} = 0$$

έπεται ότι η E λαμβάνει **ολικό μέγιστο** στο σημείο $(\sqrt{2}, E(\sqrt{2}))$.

[11] Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $e^{-k} > 0, \ \forall k > 0$.

[12] Εφαρμόστε κανόνα του de L'Hopital



Σχήμα 4: Άσκηση 3/Μέρος Β

Άσκηση Β4

(α) Να δείξετε ότι το κλάσμα $\dfrac{1}{x(x+1)^2}$ γράφεται ως άθροισμα απλών κλασμάτων ως εξής:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

(β) Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\ln x}{(x+1)^2}, & x\in(0,+\infty) \\ \\ f(1)=-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

(γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Λύση

(α)[13] Γράφουμε:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{(x+1)^2}.$$

Ισοδύναμα,

$$1\equiv A(x+1)^2+Bx(x+1)+\Gamma x$$

[13] Η άσκηση αναφέρεται σε ισότητα κλασμάτων και όχι σε ισότητα πολυωνύμων διότι αυτή είναι αντικείμενο που δεν εμπίπτει στην ύλη του Λυκείου. Παρόλαυτά, η ισότητα νοείται για $x\neq 0,-1$. Επιπλέον, η άσκηση ζητά να **δείξουμε** ότι ισχύει η ισότητα των δυο συναρτήσεων Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε **εδω**. Συνεπώς, επαλήθευση της ισότητας δεν αποτελεί (σωστή) απάντηση στην ερώτηση

δηλ.

$$1 \equiv Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + \Gamma x$$

δηλ.

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 \equiv (A + B) \cdot x^2 + (2A + B + \Gamma) \cdot x + A$$

Τότε καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα[14]

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + \Gamma = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

το οποίο δίνει τη λύση $A = 1$, $B = -1$ και $\Gamma = -1$. Έτσι, η ισότητα (κλασμάτων)

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

είναι αληθής.

(β) [15] Λόγω του ότι η f έχει (παντού) συνεχή πρώτη παράγωγο, έπεται ότι

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad \forall x \in D(f) = (0, +\infty)$$

για κάποια αυθαίρετη πραγματική σταθερά c. Αλλά, $\forall x \in D(f) = (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\int f'(x)\,dx &= \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx = \int \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2(x+1)}\right)'\,dx \\
\text{κατα μέρη} &= -\frac{\ln x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \left(-\frac{1}{x+1}\right) \cdot (\ln x)'\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx \\
\text{(α) ερώτημα} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\,dx \\
x > 0 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2(x+1)}
\end{aligned}$$

και αρα από τα πιο πάνω,

$$f(x) + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + frac12(x+1).$$

[14] Εξισώνοντας τους συντελεστές των μονωνύμων $x^0 \equiv 1$, x και x^2 στα δυο μέλη

[15] Είναι ενα **Πρόβλημα Αρχικών Τιμών**

Αλλά, η αρχική συνθήκη $f(1) = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}$ της υπόθεσης δίνει

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln 1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

δηλ.

$$c - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln 1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{4}$$

δηλ. $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[-\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right], \quad \forall x \in (0, +\infty) \tag{2}$$

(γ) Από την (2) έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}\right]$$

Αλλά,[16]

$$0 = -\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}$$

και (λόγω της συνέχειας της $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$)

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = \ln 1 = 0$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0.$$

Από τα πιο πάνω έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1} + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1} = 0$$

Άσκηση Β5

Δίνεται παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και τα σημεία της $T(t^2, 2t)$ και $P(\rho^2, 2\rho)$, όπου $t \neq \rho$, $t, \rho \neq 0$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής TP είναι $2x - (t+\rho)y + 2t\rho = 0$.

(β) Αν η χορδή TP εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2x$, να δείξετε ότι

1. $(t+\rho)^2 = 8t\rho$.
2. Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής M, των εφαπτόμενων της $y^2 = 4x$, στα σημεία της T και P, έχει εξίσωση $y^2 = 8x$.

(γ) Αν Σ είναι (τυχόν) σημείο της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 8x$, διαφορετικό από την κορυφή της και E είναι η εστία της, να δείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο ΣE, εφάπτεται του άξονα $y'y$.

[16] εφαρμόστε θεώρημα του de l'Hopital

Λύση

(α) Η εστία E της παραβολής με εξίσωση $y^2 = 4x$ είναι το σημείο $E(1, 0)$ και η διευθετούσα της (δ) έχει εξίσωση $(\delta) : x = -1$.
• Αν $t = -\rho$, τότε η χορδή είναι κάθετη του άξονα των τετμημένων, στο σημείο $(t^2, 0) \equiv (\rho^2, 0)$ και έχει εξίσωση

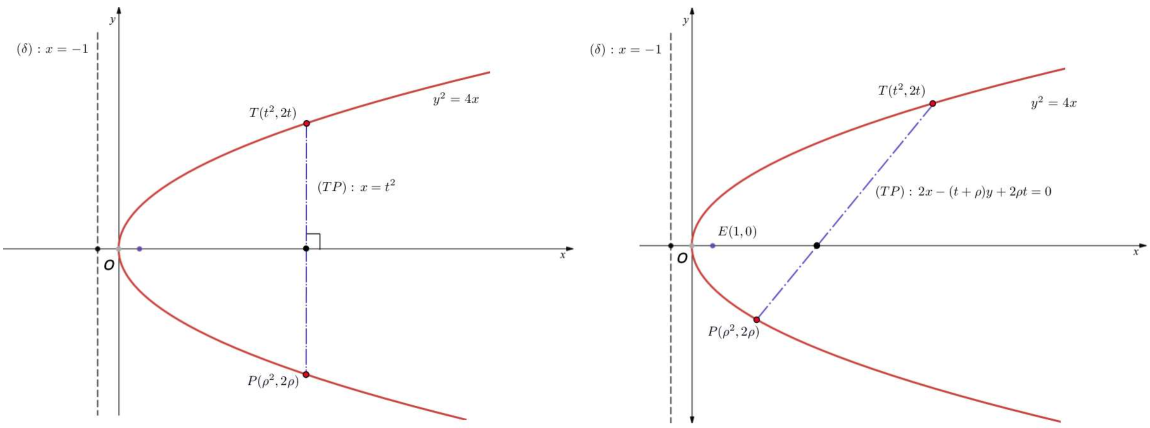
$$(TP) : \ x = t^2$$

• Έστω ότι $t \neq -\rho$. Θα βρούμε ην κλίση λ_{TP} της χορδής (TP) :[17]

$$\lambda_{TP} = \frac{y_P - y_T}{x_P - x_T} = \frac{2t - 2\rho}{t^2 - \rho^2} = 2\frac{t - \rho}{(t - \rho) \cdot (t + \rho)} = \frac{2}{t + \rho}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
(TP) : \ y - y_T = \lambda_{TP} \cdot (x - x_T) \quad &\iff \quad (TP) : \ y - 2\rho = \lambda_{TP} \cdot (x - \rho^2) \\
&\iff \quad (TP) : \ y - 2\rho = \frac{2}{t + \rho} \cdot (x - \rho^2) \\
&\iff \quad (TP) : \ (t + \rho)y - 2\rho(t + \rho) = 2x - 2\rho^2 \\
&\iff \quad (TP) : \ (t + \rho)y - 2\rho t - 2\rho^2 = 2x - 2\rho^2 \\
&\iff \quad (TP) : \ (t + \rho)y - 2\rho t - 2x = 0 \\
&\iff \quad (TP) : \ 2x - (t + \rho)y + 2\rho t = 0 \qquad (3)
\end{aligned}$$



Σχήμα 5: Άσκηση 5(α)/Μέρος Β

[17] Είναι $t \neq \pm\rho$.

(β)

1. Τα σημεία τομής της ευθείας (TP) με την παραβολή $\{y^2 = 2x\}$ δίνονται από την επίλυση του συστήματος της (3) με την $y^2 = 2x$:

$$\begin{cases} 2x - (t+\rho)y + 2\rho t = 0 \\ \\ y^2 = 2x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 - (t+\rho)y + 2\rho t = 0 \\ \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

Η διακρίνουσα Δ_y του πιο πάνω συστήματος είναι η $\Delta_y = (t+\rho)^2 - 8t\rho$. Η ευθεία (TP) τέμνει την παραβολή $\{y^2 = 2x\}$

$$\Longleftrightarrow \Delta_y = 0 \Longleftrightarrow (t+\rho)^2 = 8t\rho. \tag{4}$$

2. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την $y^2 = 4x$ (για $y \neq 0$) και παίρνουμε $y' = \dfrac{2}{y}$. Έτσι,

$$\lambda_{\varepsilon\varphi.}(T) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{T(t^2,2t)} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

και

$$\lambda_{\varepsilon\varphi.}(P) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P(\rho^2,2\rho)} = \frac{2}{2\rho} = \frac{1}{\rho}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (\varepsilon\varphi.(P)) : y - y_T = \frac{1}{t}\cdot(x - x_T) &\Longleftrightarrow (\varepsilon\varphi.(P)) : y - 2\rho = \frac{1}{t}\cdot(x-\rho^2) \\ &\Longleftrightarrow (\varepsilon\varphi.(P)) : \rho y - x = \rho^2 \end{aligned}$$

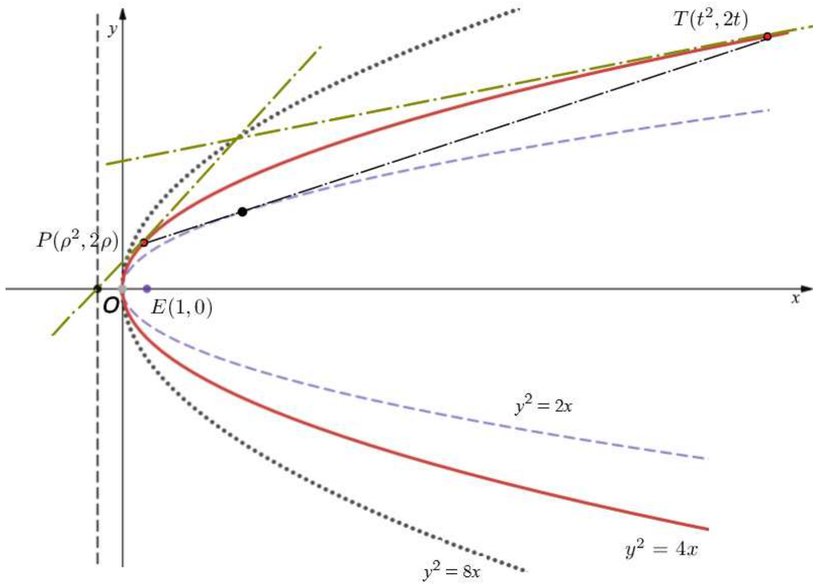
και ομοίως

$$(\varepsilon\varphi.(T)) : ty - x = t^2$$

Έχουμε (για $t \neq \pm\rho$):

$$\begin{aligned} \begin{cases} \rho y - x = \rho^2 \\ \\ ty - x = t^2 \end{cases} &\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho y - x - ty + x = \rho^2 - t^2 \\ \\ ty - x = t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\rho - t)y = (\rho - t)\cdot(\rho + t) \\ \\ ty - x = t^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \rho + t \\ \\ ty - x = t^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \rho + t \\ \\ t(\rho + t) - x = t^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \rho + t \\ \\ x = t\cdot\rho \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y^2 = (\rho+t)^2 \\ \\ x = t\cdot\rho \end{cases} \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} y^2 = 8x \end{aligned}$$

Αλλά και αντίστροφα, τα σημεία τομής M, των εφαπτόμενων της $y^2 = 4x$, στα σημεία της T και P ανήκουν στην παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$. Το συμπέρασμα έπεται.



Σχήμα 6: Άσκηση 5(β)2./Μέρος Β

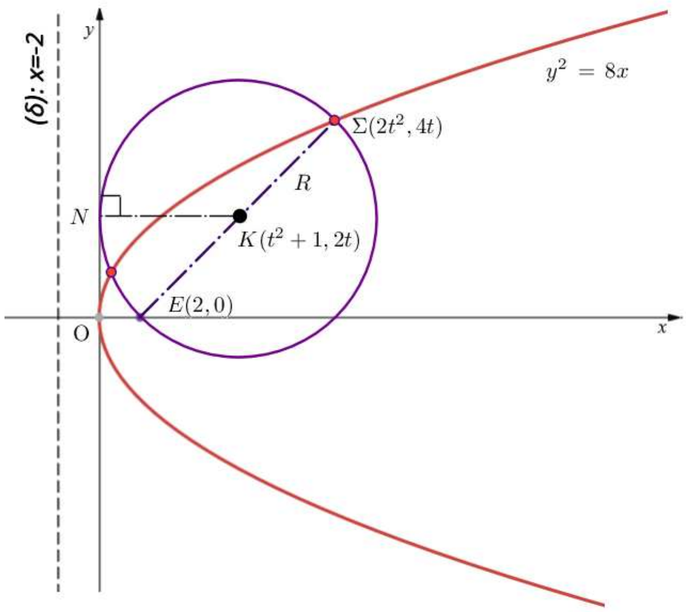
(γ) Έστω $\Sigma(2t^2, 4t)$ (με $t \neq 0$) σημείο της παραβολής $\{y^2 = 8x\}$, η οποία έχει εστιά $E(2, 0)$. Οι συντεταγμένες του κέντρου K του ευθυγράμμου τμήματος (ΣE) είναι

$$x_K = \frac{x_\Sigma + x_E}{2} = \frac{2t^2+2}{2} = t^2 + 1 \qquad \text{και} \qquad y_K = \frac{y_\Sigma + y_E}{2} = \frac{4t+0}{2} = 2t$$

δηλ. $K(t^2 + 1, 2t)$. Η ακτίνα R του κύκλου με διάμετρο (ΣE) είναι

$$\begin{aligned} R &= |KE| = \sqrt{(t^2+1-2)^2 + (2t-0)^2} = \sqrt{(t^2-1)^2 + 4t^2} = \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2} \\ &= \sqrt{(t^2+1)^2} \quad = \quad |t^2+1| \quad = \quad t^2+1 \end{aligned}$$

Επίσης, η απόσταση $|KN|$ (N το ίχνος του K πάνω στον άξονα των τεταγμένων) ισούται με $t^2 + 1$. Άρα $R = |KN|$ και το συμπέρασμα έπεται.



Σχήμα 7: Άσκηση 5(γ)/Μέρος Β