ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

13 Ιουνίου 2020

ΜΕΡΟΣ Α

Άσκηση Α1

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(7,9)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Λύση Το κέντρο $K(x_K, y_K)$ του κύκλου έχει συντεταγμένες

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \text{και} \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

δηλ. $K(4,5)$. Η ακτίνα R του κύκλου είναι

$$\begin{aligned} R &= \frac{\delta}{2} = \frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+64} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5 \end{aligned}$$

Έτσι, ο κύκλος που ψάχνουμε είναι ο

$$(C) : (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Άσκηση Α2

Να βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και της οποία η γραφική παράσταση περνά από το σημείο $A(2,6)$.

Λύση Η f' είναι συνεχής συνάρτηση (ως πολυωνυμική). Τότε

$$\begin{aligned} f'(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad &\Longrightarrow \quad \int f'(x)\,dx = \int 3x\,dx \\ &\Longrightarrow \quad f(x) = \frac{3}{2}x^2 + c \end{aligned}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Αλλά $A(2,6) \in C_f$ και αρα $f(2) = 6$. Αντικαθιστούμε στην πιο πάνω και παίρνουμε $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση Α3

Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2\,dx.$$

Λύση

$$
\begin{aligned}
\int (\etaμx + συνx)^2\,dx &= \int (\etaμ^2 x + 2\etaμxσυνx + συν^2 x)\,dx \\
&\quad (\etaμ^2 x + συν^2 x = 1, \quad 2\etaμxσυνx = \etaμ(2x)) \\
&= \int (1 + \etaμ(2x))\,dx \quad = \quad x - \frac{1}{2}συν(2x) + c \\
&= \int (1 + \etaμ(2x))\,dx \quad = \quad x - \frac{1}{2}συν(2x) + c
\end{aligned}
$$

Διαφορετικά,

$$
\begin{aligned}
\int (\etaμx + συνx)^2\,dx &= \int (\etaμ^2 x + 2\etaμxσυνx + συν^2 x)\,dx \\
&\quad (\etaμ^2 x + συν^2 x = 1, \quad 2\etaμxσυνx = \etaμ(2x)) \\
&= \int (1 + \etaμ(2x))\,dx \quad = \quad x - 2\int συνx\, d(συνx) \\
&= \int (1 + \etaμ(2x))\,dx \quad = \quad x - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot συν^2 x + c \\
&= \quad x - συν^2 x + c
\end{aligned}
$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ αυθαίρετη σταθερά. Τα δυο αποτελέσματα είναι ίδια, αφού

$$συν^2 x = \frac{1 + συν(2x)}{2}$$

και ο αριθμός $-1/2$ μπορεί να απορροφηθεί στη σταθερά ολοκλήρωσης.

Άσκηση A4

Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία

$$y = 2x + \ln 2, \quad στο \; -\infty.$$

Να βρείτε τα όρια

$$(α)\; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x) + 3x}{x} \qquad (β)\; \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x).$$

Λύση Αφού η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 2x + \ln 2$ στο $-\infty$, έπεται από γνωστό μας Θεώρημα ότι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad και \qquad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = \ln 2.$$

Τότε

$$(α)\; \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x) + 3x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} + 3 = 2 + 3 = 5$$

και

$$(\beta)\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\ln 2$$

Άσκηση Α5

Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda x+2\lambda y+16+\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε όλες τις τιμές του λ έτσι ώστε η πιο πάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο.

(β) Για τις τιμές του λ για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C_λ, να βρείτε τη συγκεκριμένη τιμή του λ, έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4,3)$ ως προς τον κύκλο C_λ, να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A)=32$.

Λύση **(α)** Είναι $a=-4\lambda$, $b=2\lambda$ και $c=16+\lambda^2$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a^2+b^2-4c &= 16\lambda^2+4\lambda^2-4(16+\lambda^2) \\ &= 16(\lambda^2-4) \end{aligned}$$

και αρα η εξίσωση αυτή εκφράζει κύκλο αν και μόνο αν $\lambda^2-4>0$ δηλ. αν και μόνο αν $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(β) Έστω $\lambda\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Τότε, η εξίσωση $x^2+y^2-4\lambda x+2\lambda y+16+\lambda^2=0$ παριστάνει κύκλο. Θα βρούμε τη συγκεκριμένη τιμή του λ, έτσι ώστε η δύναμη του σημείου $A(4,3)$ ως προς τον κύκλο C_λ, να είναι ίση με $\Delta_{C_\lambda}(A)=32$. Είναι

$$\begin{aligned} \Delta_{C_\lambda}(A)=32 &\iff 4^2+3^2-4\lambda 4+2\lambda 3+16+\lambda^2=32 \\ &\iff \lambda^2-10\lambda+9=0 \iff (\lambda-9)\cdot(\lambda-1)=0 \end{aligned}$$

και αρα $\lambda=9\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

Άσκηση Α6

(α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή με εστία το σημείο $E(a,0)$, $a>0$ και διευθετούσα την ευθεία $x+a=0$, έχει εξίσωση $y^2=4ax$.

(β) Σε τυχαίο σημείο $M(at^2,2at)$, $t\neq 0$ της παραβολής $y^2=4ax$, $a>0$ με εστία E, φέρουμε την εφαπτομένη, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A. Να δείξετε ότι η γωνία EAM ισούται με 90^o.

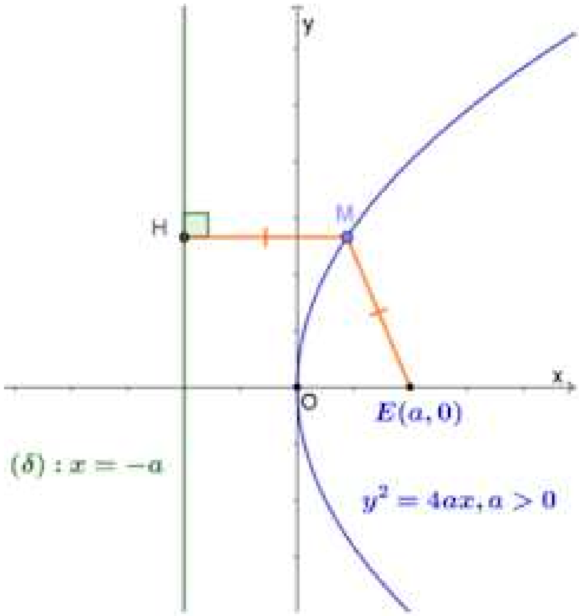
Λύση

(α) Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της παραβολής, τότε $|ME|=|MH|$, όπου H η προβολή του M πάνω στην διευθετούσα[1] Είναι

$$|ME|=|MH|\iff|ME|^2=|MH|^2\iff(x-a)^2+y^2=(x+a)^2\iff y^2=4ax.$$

(β) Η εστία της παραβολής είναι $E(a,0)$. Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M(at^2,2at)$, $t\neq 0$ της παραβολής. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωσή της: $2yy'=4a$ και αρα

[1] το σχήμα είναι από το σχολικό Γ τεύχος στη σελ.76. Στην απόδειξη του βιβλίου υπάρχει τυπογραφικό λάθος (αντί (δ) αναγράφεται (ϵ))



Σχήμα 1: Άσκηση 6 (α)

$y' = \frac{2a}{y}$. Συνεπώς, η κλίση της εφ. της παραβολής στο σημείο M είναι η $y'(at^2) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$. Έτσι, η ξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

δηλ. η

$$ty - x = at^2.$$

Για $x = 0$, η πιο πάνω δίνει $y = at$ και έτσι $A(0, at)$. Είναι

$$\lambda_{EA} = \frac{at - 0}{0 - a} = -t$$

Τότε $\lambda_{EA} \cdot \lambda_{\text{εφ.}} = \frac{1}{t} \cdot (-t) = -1$ και αρα $EA \perp$ εφ. Συνεπώς, $E\hat{A}M = \pi/2$.

Άσκηση Α7

Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha > 0$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να δείξετε ότι:
(α) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.
(β) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

Λύση **(α)** Η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ αφού $\alpha > 0$. Επίσης, είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως πηλίκο τέτοιων) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (ως πηλίκο παραγωγίσιμων). Επίσης,

$$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

και
$$g(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta}=\frac{0}{\beta}=0$$
Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(β) Από το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ενα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$. Αλλά, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι
$$g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)\cdot x'}{x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$
και αρα
$$g'(\xi)=0\Longleftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0\Longleftrightarrow \xi f'(\xi)=f(\xi).$$

Άσκηση A8

Να αποδείξετε ότι
$$2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{e}{\pi}.$$

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ln x$, $x>0$. Είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (e,π) και συνεχής στα άκρα αυτού. Συνεπώς, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον ενα) $\xi\in(e,\pi)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi)=\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}.$$
Αλλά, $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$ και
$$\xi\in(e,\pi)\Longrightarrow\frac{1}{\pi}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{e}.$$
Τα πιο πάνω δίνουν
$$\frac{1}{\pi}<\frac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e}<\frac{1}{e},$$
δηλ.
$$\frac{1}{\pi}<\frac{\ln(\pi)-\ln(e)}{\pi-e}<\frac{1}{e},$$
δηλ.
$$\frac{1}{\pi}<\frac{\ln(\pi)-1}{\pi-e}<\frac{1}{e},$$
δηλ.
$$\frac{\pi-e}{\pi}<\ln(\pi)-1<\frac{\pi-e}{e},$$
δηλ.
$$1-\frac{1}{e}<\ln(\pi)-1<\frac{\pi}{e}-1,$$
δηλ.
$$2-\frac{1}{e}<\ln(\pi)<\frac{\pi}{e}.$$

Άσκηση Α9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\text{τοξεφ}x$, $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
(β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι ισχύει

$$\text{τοξεφ}\alpha - \text{τοξεφ}\beta > \frac{\beta}{1+\beta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Λύση **(α)** η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\text{τοξεφ}x)' = x'\text{τοξεφ}x + x\cdot(\text{τοξεφ}x)' \\ &= \text{τοξεφ}x + x\cdot\frac{1}{1+x^2} = \text{τοξεφ}x + \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\text{τοξεφ}x + \frac{x}{1+x^2}\right)' = (\text{τοξεφ}x)' + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x'\cdot(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{(1+x^2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Έτσι, αφού $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι παντού κυρτή (στο $\mathbb{R}$).

(β) Αφού η f είναι παντού κυρτή (στο $\mathbb{R}$), έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha > \beta$, τότε $f'(\alpha) > f'(\beta)$. Είναι

$$\begin{aligned} f'(\alpha) > f'(\beta) &\iff \text{τοξεφ}\alpha + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} > \text{τοξεφ}\beta + \frac{\beta}{1+\beta^2} \\ &\iff \text{τοξεφ}\alpha - \text{τοξεφ}\beta > \frac{\beta}{1+\beta^2} - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \end{aligned}$$

Άσκηση Α10

Δίνεται συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο ανοικτό διάστημα A.
(α) Να αποδείξετε ότι στο A ισχύει

$$\int [f(x) + f''(x)]\text{ημ}x\, dx = f'(x)\text{ημ}x - f(x)\text{συν}x + c.$$

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right)\text{ημ}x\, dx.$$

Λύση (α)

$$\int [f(x) + f''(x)]\etaμx\, dx = \int f(x)\etaμx\, dx + \int f''(x)\etaμx\, dx.$$

Αλλά, αφού η f'' είναι συνεχής, ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει:

$$\begin{aligned}\int f''(x)\etaμx\, dx &= \int [f'(x)]'\etaμx\, dx \\ &= f'(x)\etaμx - \int f'(x)\cdot(\etaμx)'\, dx \\ &= f'(x)\etaμx - \int f'(x)\cdot συνx\, dx\end{aligned}$$

Ολοκλήρωση κατα μέρη δίνει (πάλι)

$$\begin{aligned}\int f'(x)\cdot συνx\, dx &= f(x)\cdot συνx - \int f(x)\cdot(συνx)'\, dx \\ &= f(x)\cdot συνx + \int f(x)\cdot \etaμx\, dx\end{aligned}$$

Τα πιο πάνω δίνουν

$$\begin{aligned}\int [f(x) + f''(x)]\etaμx\, dx &= \int f(x)\etaμx\, dx + f'(x)\etaμx - \left(f(x)\cdot συνx + \int f(x)\cdot\etaμx\, dx\right) \\ &= f'(x)\etaμx - f(x)\cdot συνx + c\end{aligned}$$

(κρατήσαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης για το τέλος)

(β) Εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος για $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$. Είναι $f'(x) = 1/x$ και $f''(x) = -1/x^2$, $x > 0$. Τότε,

$$\int \left(\ln x - \frac{1}{x^2}\right)\etaμx\, dx = \frac{1}{x}\etaμx - \ln x\cdot συνx + c, \quad x > 0.$$