Προσέγγιση συναρτήσεων κατά Taylor

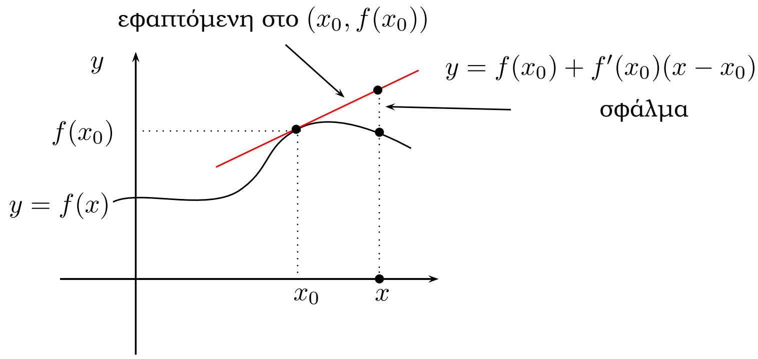
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο x_0. Τότε, όπως ξέρουμε από το Διαφορικό Λογισμό, αυτή προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση στο σημείο αυτό, δηλ υπάρχει μια συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + g_1(x)(x - x_0),$$

με $\lim_{x\to x_0} g_1(x) = 0$. Η συνάρτηση $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ είναι ακριβώς το γράφημα της εφαπτομένης της f στο σημείο x_0 και αποτελεί τη γραμμική της προσέγγιση στο σημείο αυτό. Το "υπόλοιπο" $g(x)(x - x_0)$ αποτελεί το σφάλμα στη γραμμική αυτή προσέγγιση. Μπορούμε όμως να πάρουμε μια καλύτερη προσέγγιση της f μέσω μιας συνάρτησης βαθμού 2, ήτοι

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + g_2(x)(x - x_0)^2,$$

με $\lim_{x\to x_0} g_2(x) = 0$. Το υπόλοιπο εδώ είναι η συνάρτηση $g(x)(x - x_0)^2$. Γενικότερα, μπορούμε χρησιμοποιώντας παραγώγους ανώτερης τάξης για την f να παίρνουμε όλο και καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης σε μια μικρή περιοχή του σημείου.



Ορισμός 0.0.1 *Έστω f μια μιγαδική ή πραγματική συνάρτηση η οποία είναι $n-$φορές παραγωγίσιμη γύρω από μια περιοχή ενός σημείου x_0. Το πολυώνυμο*

$$\begin{aligned} T_n(f(x); x_0) &:= f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

λέγεται το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f.
Η διαφορά $R_n(x) := f(x) - T_n(f(x); x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ λέγεται το υπόλοιπο Taylor της f γύρω από το $x = x_0$.

Το πολυώνυμο Taylor αποτελεί μια καλή γραμμική προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης f σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Η προσέγγιση αυτή γίνεται με τη βοήθεια των παραγώγων της f, γεγονός που παραπέμπει στο 2ο Θεμελιώδες Θέωρημα του Απειροστικού Λογισμού: έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt,$$

για κάθε $x \in (a,b)$. αν επιπλέον η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη, τότε μπορούμε να επαναλάβουμε την πιο πάνω διαδικασία. Γενικότερα, αν η f είναι $n-$φορές παραγωγίσιμη, συνεχίζοντας έτσι, θα φτάσουμε ακριβώς στο πολυώνυμο Taylor της f τάξης n. Συνεπώς, η εύρεση του πολυωνύμου Taylor ανάγεται στην εύρεση παραγουσών, δηλ. στην επίλυση ενός (αναδρομικού) συστήματος από διαφορικές εξισώσεις:

αν $f : I \to \mathbb{R}$ μια $n-$φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, θέτοντας $f' := g$, έχουμε οτι

$$g^{(i-1)}(x) = f^{(i)}(x),$$

για $i = 1, 2, \ldots, n$ και άρα

$$\frac{g^{(i-1)}(x)}{(i-1)!} = i\frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

[Παρατηρήστε οτι οι $g^{(i-1)}(x)$ μπορεί να είναι ορισμένες σε διαφορετικό σημείο απότι οι $f^{(i)}(x)$. Πάρτε για παράδειγμα τη συνάρτηση $f(x) = \log x,\ x \in (0, \infty)$ και προσδιορίστε το $T_n(f; 1)$. Μετά, θέτοντας $g(x) := \frac{1}{x}$, έχουμε οτι

$$\frac{g^{(i-1)}(1)}{(i-1)!} = i\frac{f^{(i)}(a)}{i!}$$

για $a > 0$ και $i = 1, 2, \ldots, n$.] Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το πολυώνυμο Taylor της f από το πολυώνυμο της παράγουσάς της: αν

$$T_n(f; x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x - x_0)^i,$$

όπου $c_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$ και F τέτοια ώστε $F' = f$, τότε

$$\begin{aligned} T_n(F(x); x_0) &= F(x_0) + \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\frac{(x-x_0)^i}{i} \\ &= F(x_0) + c_0(x - x_0) + c_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + \ldots + c_{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n}. \end{aligned}$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι κατά πόσον το πολυώνυμο Taylor αποτελεί τη μοναδική πολυωνυμική προσέγγιση για μια συνάρτηση. Η απάντηση είναι ΝΑΙ και αυτό μας το δίνουν οι παράγοντες $(x - x_0)^i$ που εμφανίζονται σε αυτό:

Ορισμός 0.0.2 *Εστωσαν f, g δύο $n-$φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα σημείο x_0. Λέμε οτι οι f και g συμφωνούν μέχρι τάξη n στο x_0 αν ισχύει*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Συγκεκριμένα, αν η g είναι ένα πολυώνυμο με την ιδιότητα αυτή, τότε λέμε οτι η g είναι μια πολυωνυμική προσέγγιση τάξης n της f στο σημείο x_0.

Πρόταση 0.0.1 *Έστω f μια $n-$φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο x_0. Τότε,*

(i) Το πολυώνυμο Taylor $T_n(f;x_0)$ τάξης n της f στο x_0 είναι μια πολυωνυμική προσέγγιση τάξης n της f στο σημείο x_0.

(ii) Αν $p(x)$ είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο (ως προς $x - x_0$) με deg$(p) \leq n$ το οποίο να συμφωνεί με την f εως τάξη n, τότε $p(x) = T_n(f;x_0)$, δηλ. το πολυώνυμο Taylor είναι το μοναδικό με την ιδιότητα αυτή.

Απόδειξη

(i) Θέτουμε $g(x) := T_{n-1}(f;x_0)$ και $h(x) := (x - x_0)^n$. Τότε,

$$T_n(f;x_0) = g(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h(x).$$

Συνεπώς,

$$\frac{f(x) - T_n(f;x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε οτι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Όπως είδαμε πιο πάνω, είναι

$$g^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Αλλά, αφού το g είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n-1$, έχουμε οτι η $g^{(n-1)}(x)$ είναι σταθερά:

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0). \tag{2}$$

Επιπλέον, για $i = 1, 2, \ldots, n-1$, είναι

$$h^{(i)}(x) = n!\frac{(x - x_0)^{n-i}}{(n-1)!}. \tag{3}$$

Από τις (1) και (3), έπεται λοιπόν οτι για $i = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$\lim_{x \to x_0} [f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)] = \frac{f^{(i)}(x_0) - g^{(i)}(x_0)}{h^{(i)}(x_0)} = 0. \tag{4}$$

και

$$\lim_{x \to x_0} h^{(i)}(x) = h^{(i)}(x_0) = 0.$$

Τώρα, από τις (1) και (3), έπεται οτι

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{h^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{5}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του deL'Hospital διαδοχικά $n-$φορές, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))}{\frac{d}{dx}(x-x_0)^n}=\cdots\\
&= \cdots\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f(x)-g(x))}{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-x_0)^n}\\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)}{x-x_0}\\
&\overset{(5)}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.
\end{aligned}
$$

(ii) Από την υπόθεση, το πολυώνυμο p προσεγγίζει την f με τάξη n στο x_0. Αλλά, από το (i), έχουμε οτι και το $T_n(f;x_0)$προσεγγίζει την f με τάξη n στο x_0. Έτσι, λόγω της εναλλαγής ορίου με άθροισμα (αφού αυτό είναι πεπερασμένο), έπεται οτι οι $T_n(f;x_0)$ και $p(x)$ συμφωνούν με τάξη n στο x_0, δηλ.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{T_n(f;x_0)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

Αλλά από αυτό έπεται οτι και

$$\lim_{x\to x_0}\frac{T_n(f;x_0)-p(x)}{(x-x_0)^j}=0 \tag{6}$$

για $j=0,1,2,\ldots,n$. Ας παρατηρήσουμε οτι το $T_n(f;x_0)-p(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$. Τέλος, εφαρμόζοντας τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο Διαίρεσης (ως προς $x-x_0$), μπορούμε να βρούμε αριθμούς $c_i,\ i=0,1,\ldots,n$ τέτοιους ώστε

$$T_n(f;x_0)-p(x)=\sum_{i=0}^{n}c_i(x-x_0)^n$$

και με τους συντελεστές c_i να δίνονται από τη σχέση έπεται οτι

$$c_i=\lim_{x\to x_0}\frac{T_n(f;x_0)-p(x)}{(x-x_0)^j} \tag{7}$$

για $j=0,1,\ldots,n$. Από τις (6) και (7), έπεται οτι $T_n-p\equiv 0$, δηλ. $T_n=p$.

Παραδείγματα 0.0.1 *Έστω*

$$f(x)=\arctan(x),\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Είναι

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}. \tag{8}$$

Αλλά ξέρουμε οτι για $m\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1-(-1)^m x^{2(m+1)}}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^m x^{2m}$$

από την οποία έπεται οτι

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^m x^{2m} + \frac{(-1)^m x^{2(m+1)}}{1+x^2}. \tag{9}$$

Έτσι, από τις $(10)-(9)$ *και το οτι* $f(0) = \arctan 0 = 0$, *έχουμε για* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^m t^{2m} + \frac{(-1)^m t^{2(m+1)}}{1+t^2}\right] dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \int_0^x \frac{(-1)^m t^{2m+2}}{1+t^2}\, dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + R_{2m}(f;0). \end{aligned}$$

Αλλά, για $t \in [0, x]$, *είναι* $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ *και άρα*

$$|R_{2m}(f;0)| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^m t^{2m+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \int_0^x t^{2m+2}\, dt = \frac{x^{2m+3}}{2m+3}.$$

Πρόταση 0.0.2 *Έστω* f *μια* $(n+1)-$*φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα* I *με* $x_0 \in I$ *και* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \ \forall x \in I$, *για κάποια σταθερά* $M > 0$, *τότε,*

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Παρατήρηση Από την πιο πάνω Πρόταση για την εκτίμηση του Υπολοίπου Taylor έχουμε οτι αν $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ σε μία περιοχή του σημείου x_0, έστω $(x_0 - r, x_0 + r), \ (r > 0)$, τότε

$$|R_n(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Οι εκτιμήσεις αυτές ισχύουν ομοιόμορφα για όλα τα x στο διάστημα $(x_0 - r, x_0 + r)$. Έχοντας αναπτύξει τα κύρια σημεία της προσέγγισης μιας συνάρτησης με πολυώνυμο Taylor, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε αυστηρά το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου αυτής:

Θεώρημα 0.0.1 (Taylor) *Έστω* $n \in \mathbb{Z}_+$ *και έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση* $n-$*φορές διαφορίσιμη στο σημείο* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Τότε, υπάρχει μια συνάρτηση* $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + g_n(x)(x - x_0)^n,$$

με

$$\lim_{x \to x_0} g_n(x) = 0,$$

δηλ. η g_n *είναι της τάξης του* $|x - x_0|^n$. *Αυτό συμβολίζεται και με* $g_n(x) = \mathcal{O}(|x - x_0|^n), \quad x \to x_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases},$$

όπου

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Αρκεί να δείξουμε οτι $\lim_{x\to x_0} g_n(x) = 0$. Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα του L'Hospital. Έχουμε $\forall j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ οτι $f^{(j)}(x_0) = P_n^{(j)}(x_0)$. Επομένως, κάθε μια από τις πρώτες $n-1$ παραγώγους του αριθμητή στην g_n μηδενίζονται στο x_0 όπως επίσης και του παρονομαστή. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{d}{dx}(f(x)-P_n(x))}{\frac{d}{dx}(x-x_0)^n} = \cdots \\
&= \cdots \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(f(x)-P_n(x))}{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x-x_0)^n} \\
&= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0} \\
&= \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)) = 0.
\end{aligned}$$

■

Το πιο πάνω Θεώρημα μας δίνει και τη μορφή που έχει το υπόλοιπο $f(x)-T_n(f;x_0) \equiv R_n(f;x_0)$. Το υπόλοιπο αυτό παίρνει τη Μορφή Υπολοίπου Μέσης Τιμής (Ύπόλοιπο κατά Lagrange') ή ολοκληρωτική μορφή:

Θεώρημα 0.0.2 *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$φορές διαφορίσιμη και $x_0 \in I$. Αν $T_n(f;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0, τότε, $\forall x \in I$, $\exists \xi \in (x_0, x)$ τέτοιο ώστε*

$$f(x)-T_n(f;x_0) \equiv R_n(f;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Αν επιπλέον, η $f^{(n+1)} \in \mathcal{R}([x_0, x])$, τότε

$$R_n(f;x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(t-x_0)^n\, dt.$$

Θεώρημα 0.0.3

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Παρατηρήσεις 0.0.1 *(i) Το Θεώρημα του Taylor βασίζεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε διάστημα $[a, b]$:*

$$f(x) = f(a) + \int_{a}^{x} f'(t)\, dt \tag{10}$$

με κύριο σημείο τη δυνατότητα εύρεσης παράγουσας για την f. Το γεγονός αυτό μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση με μια σειρά χωρίς ωστόσο εν γένει αυτή να ταυτίζεται με τη συνάρτηση. Όμως, έχοντας την αντίστοιχη σειρά, μπορούμε να υπολογίσουμε προσεγγιστικά την παράγουσα μιας συνάρτησης όταν δεν μπορούμε να την εκφράσουμε με τα συνηθισμένα εργαλεία του Α.Λ.. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ακριβώς αυτό:

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Η σειρά Taylor της $g(x) = \sin x$ γύρω από το $x = 0$ υπολογίζεται εύκολα:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

και διαιρώντας με το $x \neq 0$ παίρνουμε τη σειρά Taylor της f γύρω από το $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots .$$

Αφού $f \in C(\mathbb{R})$, έπεται οτι αυτή έχει παράγουσα F (παντού). Από το ΘΘΑΛ, αυτή δίνεται από

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} F(x) &\approx \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \left[(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}\, dt \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \right] \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Σημειώστε πως η εναλλαγή ολοκλήρωσης με άθροιση είναι εφικτή λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειρας (βλέπε Θεώρημα (**??**)). Εδώ όμως, επειδή προσεγγίζουμε την F, μας αρκούν πεπερασμένοι όροι. Τώρα ως εφαρμογή, θα προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sin(1)$ με σφάλμα το πολύ 0.0001. Είναι $F(1) = \sin(1)$,*

$$T_n(F(1); 0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!}$$

και $|F(1) - T_n(F; 0)| \leq \frac{1}{(2n+3)(2n+3)!}$. Για $n = 1$ είναι

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} = \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.001667$$

και για $n = 2$ είναι

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+3)!} = \frac{1}{7 \cdot 7!} = 0.000028.$$

Έτσι,

$$\sin(1) \approx T_2(F(1); 0) = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.946111.$$

(ii) *Μια $\mathcal{C}^\infty$, δηλ. μια συνάρτηση η οποία έχει παραγώγους κάθε τάξης και οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις, λέγεται αναλυτική σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν αναπαρίσταται από την αντίστοιχη σειρά Taylor σε μια περιοχή του σημείου αυτού. Δεν ισχύει πάντα οτι μια $\mathcal{C}^\infty$ είναι και αναλυτική. Για παράδειγμα η*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Η $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ αλλά $f^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα η σειρά Taylor της f γύρω από το $x = 0$ είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Για τις λεπτομέρειες δες ασκήσεις.

Παραδείγματα 0.0.2

(1) Θα προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $x \mapsto e^x,\ x \in \mathbb{R}$ με το πολυώνυμο Taylor της T_n τάξης $n = 1, \ldots, 7$ γύρω από το $x = 0$ με προκαθορισμένο σφάλμα. Επιλέγουμε ως περιοχή του $x = 0$ το διάστημα $[-1, 1]$ και απαιτούμε το σφάλμα να είναι $\leq 10^5$. Ξέρουμε οτι

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Επομένως,

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\right|_{x=0} e^x = e^0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \ (x \in \mathbb{R}). \tag{11}$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο Taylor της e^x τάξης n γύρω από το $x = 0$ είναι το

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

με αντίστοιχο υπόλοιπο

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}, \tag{12}$$

όπου $\xi \in (0, x)$. Τώρα, αφού η e^x είναι αύξουσα, έπεται οτι

$$e^x \leq 1,\ \forall x \in [-1, 0], \tag{13}$$

οπόταν από την (11) μπορούμε να βρούμε ένα άνω φράγμα για το υπόλοιπο στο διάστημα $[-1, 0]$. Για ένα άνω φράγμα στο διάστημα$[0, 1]$ χρησιμοποιούμε το ότι η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα: $e^\xi < e^x,\ \xi \in (0, x)$ και παίρνουμε για $x \in (0, 1]$ από το ανάπτυγμα Taylor της e^x τάξης 2

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{e^\xi}{2} x^2 < 1 + x + \frac{e^x}{2} x^2 \\ \Leftrightarrow e^x &\leq \frac{1+x}{1 - \frac{x^2}{2}} = 2\frac{1+x}{2 - x^2} \leq 4. \end{aligned} \tag{14}$$

Από τις σχέσεις $(12)-(14)$ έχουμε οτι

$$|R_n(x)| \leq \frac{4|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{4}{(n+1)!}, \qquad x \in [-1,1].$$

Άρα, το ζητούμενο φράγμα για το σφάλμα επιτυγχάνεται όταν

$$\frac{4}{(n+1)!} < 10^{-5} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 10^5 < (n+1)! \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 9.$$

Άρα, έχουμε οτι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^9}{9!} + R_9(x), \qquad |R_9(x)| < 10^{-5}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

(2) Θα προσεγγίσουμε τον αριθμό $\exp$.

Σύνοψις Έστω $f : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ $(n+1)-$φορές παραγωγίσιμη σε μια περιοχή $\varpi(x_0)$ ενός $x_0 \in I$. Τότε, για $x \in \varpi(x_0)$,

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\, dt = \Big[f^{(n)}(t) \Big]_{t=x_0}^{x} = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0).$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της πιο πάνω εξίσωσης και λαμβάνοντας υπόψιν οτι το $f^{(n)}(x_0)$ είναι σταθερά, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 \right) dt_2 &= \int_{x_0}^{x} \Big[f^{(n)}(t_2) - f^{(n)}(x_0) \Big]\, dt_2 \\
&= \Big[f^{(n-1)}(t_2) \Big]_{t_2=x_0}^{x} - (x-x_0) f^{(n)}(x_0) \\
s &= \Big[f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) \Big] - (x-x_0) f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

και ξαναολοκληρώνονας, λαμβάνουμε οτι

$$\begin{aligned}
& \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 \right) dt_2 \right) dt_3 \\
= \; & \int_{x_0}^{x} \Big(f^{(n-1)}(t_3) - f^{(n-1)}(x_0) - (t_3 - x_0) f^{(n)}(x_0) \Big)\, dt_3 \\
= \; & f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) - (x-x_0) f^{(n-1)}(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{2} f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας έτσι, έχουμε

$$\int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\ldots \left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 \right) \ldots dt_n \right) dt_{n+1} \right) \quad = \quad f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

και θέτοντας

$$R_n(x) := \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{x} \left(\ldots \left(\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 \right) \ldots dt_n \right) dt_{n+1} \right),$$

έχουμε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} - R_n(x).$$

Η έκφραση αυτή μας λέει οτι η συνάρτηση f προσεγγίζεται από ένα πολυώνυμο. Μάλιστα, αυτό που την 'εμποδίζει' να είναι ίση με τη σειρά Taylor είναι το υπόλοιπο R_n το οποίο είναι συνάρτηση του x. Ξαναγράφοντας το R_n, έχουμε

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt,$$

η οποία είναι η ολοκληρωτική μορφή του υπολοίπου. Τώρα, από το ΘΜΤ για οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση h στο $[a,b]$ είναι

$$\int_a^b h(t)(t-a) = (t-a)h(\xi),$$

για κάποιο $\xi \in (a,b)$. Εφαρμόζοντάς το για $h = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$, και $[a,b] = [x_0, x]$ και ολοκληρώνοντας $n+1$ φορές, έχουμε

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x),$$

η οποία είναι η μορφή Lagrange του υπολοίπου.

Ασκήσεις

---

1. Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης

$$x \mapsto f(x) := \frac{1}{1+x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

γύρω από το $x = 0$.

2. Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \ln(1+x)$$

γύρω από το $x = 0$ και ακολούθως να δειχθεί οτι αυτή συγκλίνει στην f. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του υπολοίπου Taylor $R_{f,n}(0)$ χρησιμοποιώντας τους 3 πρώτους όρους.

3. Να υπολογιστούν οι σειρές Taylor γύρω από το $x = 0$ των συναρτήσεων $\sin x$ και $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ και να δειχθεί οτι αυτές συγκλίνουν στις αντίστοιχες συναρτήσεις.

4. Να υπολογιστεί το υπόλοιπο τάξης n στο σημείο $x_0 = 3$ για τη συνάρτηση $x \mapsto e^{2x}$.

5. Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$.

6. Προσεγγίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ με σφάλμα ≤ 0.0008.

7. Έστω

$$\psi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}.$$

Δείξτε οτι η $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ αλλά $\psi_0^{(n)}(0) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα η σειρά Taylor της ψ_0 γύρω από το $x = 0$ είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Για τις λεπτομέρειες δες ασκήσεις.

Λύσεις

1. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(0) = -1 \\
f^{(2)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{(-1)^2 2}{(1+x)^3} \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2! \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right) = \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^n n!.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \quad (n \geq 1).$$

Άρα, το πολυώνυμο Maclaurin της f βαθμού n είναι το

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

και η σειρά Maclaurin της f η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

2. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0 \\
f'(x) &= \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) &= \frac{d^2}{dx^2}\ln(1+x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = -1 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{d^n}{dx^n}\ln(1+x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n(n-2)\ldots 1}{(1+x)^{n-1}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)(n-2)\ldots 1}{(1+x)^n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n \geq 1).$$

Άρα, η σειρά Taylor της f γύρω από το $x = 0$ είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$$

Από το Θεώρημα Taylor έχουμε οτι

$$f(x) := \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + R_{f,n}(0),$$

όπου για το $R_{f,n}(0)$ ισχύει

$$R_{f,n}(0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

$\xi \in (0, x)$.
Αφού $x \in (-1, 1)$ και $c \in (0, x)$, έχουμε οτι και $c \in (0, 1)$. Τώρα,

$$R_{f,3}(0) = \frac{(-1)^3 x^4}{4(1+c)^4} \Rightarrow |R_{f,3}(0)| = \frac{|x|^4}{4|1+c|^4} \overset{|x|<1}{<} \frac{1}{4(1+c)^4}.$$

Οπόταν, για να μεγιστοποιήσουμε το σφάλμα $R_{f,3}(0)$ θα μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση $c \mapsto \frac{1}{(1+c)^4}$, $c \in (0, 1)$. Η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα, επομένως $\max_{c\in(0,1)} \frac{1}{(1+c)^4} = \left.\frac{1}{(1+c)^4}\right|_{c=0} = 1$. Επομένως, $|R_{f,3}(0)| \leq \frac{1}{4}$ και άρα το μέγιστο σφάλμα είναι $\frac{1}{4}$. Τέλος, αποδεικνύεται οτι $\lim_{n\to\infty} R_{n,f}(0) = 0$, επομένως,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1).$$

3. Έστω $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \cos x$. Από τις σχέσεις

$$f^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{αν } m = 2k \\ (-1)^k \cos x, & \text{αν } m = 2k+1, \end{cases}$$

και

$$g^{(m)}(x) = \begin{cases} (-1)^k \cos x, & \text{αν } m = 2k \\ (-1)^k \sin x, & \text{αν } m = 2k+1, \end{cases}$$

έχουμε

$$\sin x \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

και

$$\cos x \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Θα δείξουμε οτι $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Ισοδύναμα, οτι $R_n(x) \xrightarrow{n} 0$, όπου R_n το υπόλοιπο κατά Taylor της συνάρτησης. Πράγματι, από την εκτίμηση του υπολοίπου, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x).$$

Αλλά, $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα,

$$\begin{aligned} 0 \leq |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \xi \in (0, x). \end{aligned}$$

Όμως, $\frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow{n} 0$, αφού για κάθε x σταθεροποιημένο, $\frac{|x|^n}{n!} > 0$ και

$$\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} < 1,$$

όταν $n > |x| - 1$. Το αποτέλεσμα έπεται από το Κριτήριο Λόγου σύγκλισης ακολουθιών (αν $(a_n)_n$ ακολουθία πραματικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho < 1$, τότε $a_n \to 0$)

4. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x} \\ f''(x) &= 2^2 e^{2x} \\ f^{(3)}(x) &= 2^3 e^{2x} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= 2^n e^{2x}. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$R_n(3) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-3)^{n+1} = \frac{2^{n+1} e^{2\xi}}{(n+1)!} (x-3)^{n+1}, \quad \xi \in (x, 3).$$

5. Ξέρουμε οτι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ και $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. Έστω οτι το ζητούμενο ανάπτυγμα Taylor έχει τη μορφή

$$\frac{e^x}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} e^x &= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots) \cos x \\ &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots\right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= c_0 - \frac{c_0}{2} x^2 + \frac{c_0}{4!} x^4 + c_1 x - \frac{c_1}{2} x^3 + \frac{c_1}{4!} x^5 + c_2 x^2 - \frac{c_2}{2} x^4 + \frac{c_2}{4!} x^6 + \\ &\quad + c_3 x^3 - \frac{c_3}{2} x^5 + \frac{c_3}{4!} x^7 + \cdots \\ &= c_0 + c_1 x + \left(c_2 - \frac{c_0}{2}\right) x^2 + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right) x^3 + \left(c_4 + \frac{c_0}{4!} - \frac{c_2}{2}\right) x^4 + \ldots \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας όρο με όρο τα δύο αναπτύγματα έχουμε οτι η ζητούμενη σειράTaylor είναι η

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \cdots .$$

6. Η σειρά Taylor της e^x γύρω από το $x = 0$, είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, έπεται οτι η σειρά Taylor της e^{-x^2} γύρω από το $x = 0$, είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$. Έτσι,

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} - R_n(0, x^2) \tag{15}$$

όπου

$$|R_n(0, x^2)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!},$$

για $x \geq 0$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της (15) Για $x > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^2}\, dt &= \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\right] dt - \int_0^x R_n(0, t^2)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^x \left[(-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\right] dt - \int_0^x R_n(0, t^2)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right] dt - \int_0^x R_n(0, t^2)\, dt. \end{aligned}$$

Είναι

$$\left|\int_0^x R_n(0, t^2)\, dt\right| \leq \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{(n+1)!}\, dt = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(n+1)!} \leq 0.0008.$$

Για $x = 1$, είναι

$$\frac{1}{(2n+2)(n+1)!} \leq 0.0008 \Leftrightarrow n = 4.$$

Έτσι,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} = 0.7382$$

με σφάλμα ≤ 0.0008.

7. Για $x \neq 0$, η ψ_0 είναι C^∞. Θα δείξουμε οτι είναι C^∞ και στο $x = 0$. Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} \psi_0(x) = 0$ και

$$\lim_{x\to 0^-} \psi_0(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-1/x} = \lim_{k\to +\infty} e^{-k} = \lim_{k\to +\infty} \frac{1}{e^k} = 0.$$

Επομένως, υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \psi_0(x)$ και $= 0 = \psi_0(0)$. Άρα, η ψ_0 είναι συνεχής (και) στο $x = 0$. Τώρα, θα δείξουμε τη διαφορισιμότητα της ψ_0 στο $x = 0$:

$$\frac{\psi_0(x) - \psi_0(0)}{x} = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{για } x > 0 \\ \\ 0, & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_0(x) - \psi_0(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} \overset{k=1/x}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{k}{e^k} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^k} = 0.$$

Ομοίως,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\psi_0(x) - \psi_0(0)}{x} = 0.$$

Συνεπώς,

$$\exists \lim_{x\to 0} \frac{\psi_0(x) - \psi_0(0)}{x} \quad \text{και} \quad = 0,$$

δηλ.

$$\frac{d\psi_0}{dt}(x)\Big|_{x=0} = 0.$$

Έχουμε

$$\psi_0'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1/x}}{x}, & \text{για } x > 0 \\ \\ 0, & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$$

Ομοίως, επαληθεύουμε τη συνέχεια της ψ_0' στο $x = 0$. Έτσι, $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Γενικά, αποδεικνύεται οτι για κάθε $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\psi_0^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p_k(x)}{x^{3k}} e^{-\frac{1}{x}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Πίνακας 1: Αναπτύγματα Taylor διαφόρων συναρτήσεων

$f(x)$	Κέντρο	Σειρά Taylor	Πεδίο Τιμών
e^x	$x=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$x=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$x=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x}$	$x=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-1,1)$
$\frac{1}{1+x}$	$x=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$(-1,1)$
$\ln(1+x)$	$x=0$	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$	$(-1,1)$
$\ln(1-x)$	$x=0$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$	$(-1,1)$
$\sinh x$	$x=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$x=0$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$x=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1}$	$[-1,1]$
$\sqrt{1+x}$	$x=0$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{(1-2k)(n!)^2 (4^k)} x^k$	$[-1,1]$