Πίνακας 1.1- Βασικά Αόριστα Ολοκληρώματα		
Συνάρτηση f	**Παράγωγος Συνάρτηση**	**Αόριστο Ολοκλήρωμα** $\int f(x)dx$
$f(x) = x^n \ (x \neq 0)$ $(n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$(x^n)' = (n-1)x^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{x} \ (x \neq 0)$	$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}, (x \neq 0)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$f(x) = e^{ax} \ (a \neq 0)$	$(e^{ax})' = \alpha e^{ax}$	$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$
$f(x) = \alpha^x \ (a > 0)$	$(\alpha^x)' = \ln a \cdot \alpha^x$	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln a} + c$
$f(x) = \eta\mu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$
$f(x) = \varepsilon\varphi x$ $x \in \mathbb{R} - \left\{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$	$(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x$	$\int \tau\varepsilon\mu^2 x dx = \varepsilon\varphi x + c$
$f(x) = \sigma\varphi x$ $x \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$	$(\sigma\varphi x)' = -\sigma\tau\varepsilon\mu^2 x$	$\int \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x dx = -\sigma\varphi x + c$
$f(x) = \tau o\xi\eta\mu x \coloneqq \eta\mu^{-1}x$ $x \in (-1,1)$	$(\tau o\xi\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + c$
$f(x) = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x \coloneqq \sigma\upsilon\nu^{-1}x$ $x \in (-1,1)$	$(\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tau o\xi\sigma\upsilon\nu x + c$
$f(x) = \tau o\xi\varepsilon\varphi x \coloneqq \varepsilon\varphi^{-1}x$ $x \in \mathbb{R}$	$(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + c$
$f(x) = \tau o\xi\sigma\varphi x \coloneqq \sigma\varphi^{-1}x$ $x \in \mathbb{R}$	$(\tau o\xi\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\tau o\xi\sigma\varphi x + c$

Πίνακας Τριγωνομετρικών Αντικαταστάσεων	
Η υπο ολοκλήρωση συνάρτηση περιέχει εκφράσεις της μορφής:	Αντικατάσταση
$\int f\left(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) dx, \quad \lvert x\rvert \leq a, a \neq 0$	$x(\theta) = a\eta\mu\theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\int f\left(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2}\right) dx, \quad \alpha \neq 0$	$x(\theta) = a\varepsilon\varphi\theta, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ (\tau\varepsilon\mu\theta > 0)$
$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}\right) dx, \quad \lvert x\rvert \geq a, \neq 0$	$x(\theta) = a\tau\varepsilon\mu\theta, \theta \in (0, \pi) \ (\sigma\upsilon\nu\theta > 0)$

Μια σημαντική κατηγορία (αόριστων) ολοκληρωμάτων

Ολοκλήρωμα	Αντικατάσταση	Αποτέλεσμα	Απόδειξη
$\int \frac{dx}{x^2+a^2}\ (a \neq 0)$	$u=\frac{x}{a}$	$\frac{1}{a}τοξεφ\left(\frac{x}{a}\right)+c$	$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{α}\right)^2+1}$ $=\frac{1}{α}\int \frac{d\left(\frac{x}{α}\right)}{\left(\frac{x}{α}\right)^2+1}=\frac{1}{a}τοξεφ\left(\frac{x}{a}\right)+c$
$\int \frac{dx}{(x\pm α)^2+β^2}\ (β \neq 0)$	$u=\frac{x\pm α}{β}$	$\frac{1}{β}τοξεφ\left(\frac{x\pm α}{β}\right)+c$	$\int \frac{dx}{(x\pm α)^2+β^2}=\frac{1}{β}τοξεφ\left(\frac{x\pm α}{β}\right)+c$
$\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}$ $(a \neq 0)$ $(Δ \coloneqq β^2-4αγ>0)$		$\frac{1}{\sqrt{Δ}}\ln\left(\frac{2αx+β-\sqrt{Δ}}{2αx+β+\sqrt{Δ}}\right)+c$	$\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}$ $=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{β}{2a}\right)^2-\left(\frac{Δ}{4α^2}\right)}$ $=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{β}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)^2}$ του οποίου ο παρονομαστής παραγοντοποιείται ως $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{β}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)^2}$ $=\frac{1}{4a\cdot(2αx+β-\sqrt{Δ})\cdot(2αx+β+\sqrt{Δ})}$ με μια ανάλυση σε απλά κλάσματα έχουμε $\frac{1}{\sqrt{Δ}}\cdot\left(\frac{1}{2αx+β-\sqrt{Δ}}-\frac{1}{2αx+β+\sqrt{Δ}}\right)$ και τελικά $\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}=\frac{1}{\sqrt{Δ}}\ln\left(\frac{2αx+β-\sqrt{Δ}}{2αx+β+\sqrt{Δ}}\right)+c$
$\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}$ $(Δ \coloneqq β^2-4αγ<0, a \neq 0)$	$u=\frac{2αx+β}{\sqrt{-Δ}}$	$\frac{2}{\sqrt{-Δ}}τοξεφ\left(\frac{2αx+β}{\sqrt{-Δ}}\right)+c$	Έχουμε $4αγ-β^2>0$ και $\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{β}{2a}\right)^2+\left(-\frac{Δ}{4α^2}\right)}$ $=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{β}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-Δ}}{2α}\right)^2}$ και (αφού $-\frac{Δ}{4α^2}>0$), θεωρώντας το μετασχηματισμό $u=\frac{x+\frac{β}{2a}}{\frac{\sqrt{-Δ}}{2α}}=-\frac{2α}{\sqrt{-Δ}}(2αx+β),$ έχουμε τελικά $\int \frac{dx}{ax^2+βx+γ}=\frac{2}{a\sqrt{-Δ}}τοξεφ\left(\frac{2αx+β}{\sqrt{-Δ}}\right)+c$

Σημείωση: Για τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+\beta x+\gamma}dx,$$

όπου $A, a \neq 0, \Delta \coloneqq \beta^2-4a\gamma<0$ το ολοκλήρωμα αναλύεται σε άθροισμα 2 ολοκληρωμάτων:

$$\frac{A}{a}\int \frac{ax+\beta}{ax^2+\beta x+\gamma}dx+\left(B-\frac{A\beta}{a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+\beta x+\gamma}$$

τα οποία υπολογίζονται κατα τα γνωστά (βλ. προηγούμενο πίνακα).

Παραδείγματα-Εφαρμογές

❶ Έστω $\alpha \neq 0$. Τότε

$$\frac{1}{x^2-\alpha^2}=\frac{1}{(x-\alpha)(x+\alpha)}=\frac{1}{2a(x-\alpha)}-\frac{1}{2a(x+\alpha)}$$

και αρα

$$\int\frac{dx}{x^2-\alpha^2}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x+\alpha)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right|+c$$

❷ Έστω $0\neq\alpha\neq\beta\neq 0$. Τότε για το

$$I=\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)},$$

θέτουμε $u=x-\beta$ [1] και λαμβάνουμε

$$I=\int\frac{du}{\big(u-(\alpha-\beta)\big)u}$$

αλλά

$$\frac{1}{\big(u-(\alpha-\beta)\big)u}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{u-(\alpha-\beta)}-\frac{1}{u}\right)$$

και αρα

$$I=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{u-(\alpha-\beta)}{u}\right|+c=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-a}{x-\beta}\right|+c$$

❸ $$\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{dx}{(x^2+2x+1)+1}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+1)+c$$

και

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\int\frac{d(x+1)}{(x+2)^2+1}=\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+2)+c$$

και

$$\int\frac{dx}{2x^2+3x+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}=\frac{2}{\sqrt{23}}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4x+3}{\sqrt{23}}\right)+c$$

❹ $$\int\frac{x+1}{x^2-4x+8}dx=\int\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx+3\int\frac{dx}{x^2-4x+8}$$

Είναι

$$\int\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8)+c_1$$

και

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-2}{2}\right)+c_2$$

και αρα τελικά,

$$\int\frac{x+1}{x^2-4x+8}=\ln\sqrt{x^2-4x+8}+\frac{3}{2}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x-2}{2}\right)+c$$

[1] ή $u=x-\alpha$

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}dx = -\int \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dx$$

Αλλά,

$$\int \frac{2x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dx = \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln(x^2+x+1)+c_1$$

και

$$\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{3}\frac{2x+1}{3}\right)+c_2,$$

συνεπώς,

$$\int \frac{1-x}{x^2+x+1}dx = \sqrt{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\sqrt{3}\frac{2x+1}{3}\right) - \ln\sqrt{x^2+x+1}+c$$

❺

$$\int \frac{xdx}{x^2+6x+13} = \int \frac{x+3-3}{(x+3)^2+4}dx = \int \frac{x+3}{(x+3)^2+4}dx - 3\int \frac{dx}{(x+3)^2+4}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d((x+3)^2+4)}{(x+3)^2+4} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\left[\ln[(x+3)^2+4] - 3\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+3}{2}\right)\right]+c$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+6x+13) - 3\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x+3}{2}\right)\right]+c$$