

0.1. Ορισμένο Ολοκλήρωμα και Συμμετρία συναρτήσεων

Άσκηση (20-33 από το (ΝΓΓ))

1. Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **περιττή** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2. Έστω $a > 0$ και $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ μια **συνεχής** και **άρτια** συνάρτηση. Τότε

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Απόδειξη.

1. Θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$g : [-a, 0] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g(x) = f(-x).$$

Η g είναι συνεχής άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^0 g(x) dx$ και έτσι:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_{-a}^0 g(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx \\ &= - \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

αφού η f είναι περιττή συνάρτηση. Διαφορετικά,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_a^0 f(-x) d(-x) \\ &= - \int_a^0 f(-x) dx \\ &= \int_0^a f(-x) dx = - \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι περιττή συνάρτηση. Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

2. Θεωρούμε το μετασχηματισμό g όπως πριν.

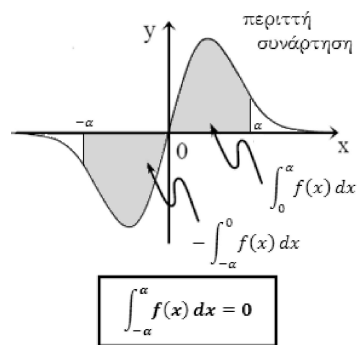
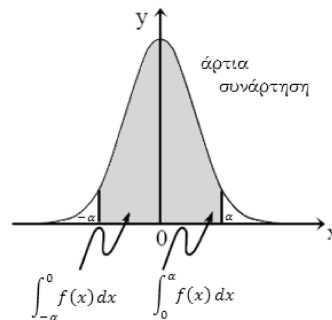
Τότε

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_0^a g(x) dx \\ &= \int_0^a f(-x) dx = \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

□



Η f υποτίθεται συνεχής συνάρτηση

Παραδείγματα

1. Έχουμε

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_1^{-1} \frac{(-x)^5 - 2(-x)}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} d(-x) = - \int_{-1}^1 \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = -I$$

και αρα $I = 0$. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ είναι περιττή στο (συμμετρικό περί του $x = 0$) διαστήματος $[-1, 1]$.

2. [Ολοκληρώματα Fourier-Βλ. Άσκηση 22-87 από το (NTT)]

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases}$$

Κάνουμε χρήση των γνωστών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων [Βλ. Άσκηση 22-86 από το (NTT)]

$$\begin{aligned} 2 \sin(a) \cdot \cos(b) &= \sin(a - b) + \sin(a + b) \\ 2 \sin(a) \cdot \sin(b) &= \cos(a - b) - \cos(a + b) \\ 2 \cos(a) \cdot \cos(b) &= \cos(a - b) + \cos(a + b) \end{aligned}$$

Για το πρώτο, αν $m \neq n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m - n} \cos[(m - n)x] + \frac{1}{m + n} \cos[(m + n)x] \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

λόγω του ότι $\cos(-x) = \cos(x)$. Το ίδιο αποτέλεσμα εξάγεται αν σκεφτούμε ότι, αφού η συνάρτηση $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή και η συνάρτηση $x \mapsto \cos(nx)$ είναι άρτια, το γινόμενό τους είναι περιττή συνάρτηση. Το αποτέλεσμα έπεται τότε από την προηγούμενη εφαρμογή. Τώρα αν $m = n$, το αποτέλεσμα είναι επίσης άμεσο. Για το δεύτερο, αν $m \neq n$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos[(m - n)x] - \cos[(m + n)x]] dx \\ &= \frac{1}{2(m - n)} [\sin[(m - n)x] - \sin[(m + n)x]]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ενώ αν $m = n$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx &= \frac{1}{2m} [mx - \cos(2mx)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2m} \left[m\pi - \frac{1}{2} \cos(2m\pi) - m(-\pi) + \frac{1}{2} \cos(-2m\pi) \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left[2m\pi - \frac{1}{2} \cos(2m\pi) + \frac{1}{2} \cos(2m\pi) \right] \\ &= \frac{2m\pi}{2m} = \pi\end{aligned}$$

Διαφορετικά, εκμεταλλευόμαστε το ότι $x \mapsto \sin(mx)$ είναι περιττή στο συμμετρικό περι του $x = 0$ διάστημα $[-\pi, \pi]$ και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx) dx = 0$$

οπότεν

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \frac{1}{2m} [mx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx) dx = \pi.$$

Εντελώς όμοια και για το τρίτο ολοκλήρωμα.

Πρόταση

Έστω $a < b$ και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε

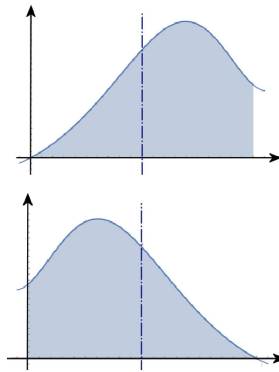
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) dx. \quad (1)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = a + b - x$. Είναι $u'(x) = -1, \forall x \in [a, b]$ ήτοι γν. φθίνουσα συνάρτηση και αφού $u(a) = b, u(b) = a$, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(a + b - x) dx &= - \int_b^a f(u) du \\ &= \int_a^b f(u) du \\ &\equiv \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

□

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου που καθορίζεται από το γράφημα μιας συνάρτησης παραμένει αμετάβλητο αν εφαρμόζουμε ανάκλαση της συνάρτησης γύρω από την ευθεία $x = (b - a)/2$, δηλ. την ευθεία στο μέσο του διαστήματος $[a, b]$. Με άλλα λόγια, ο 'προσανατολισμός' του διαστήματος δεν παίζει ρόλο στο ολοκλήρωμα.



Σχήμα 1: Γεωμετρική Ερμηνεία της (1)

Ας κάνουμε εδώ μια παρατήρηση σχετική με το

χειρισμό των αντικαταστάσεων στο Ορισμένο ολοκλήρωμα: Εφαρμόσαμε αυστηρά το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητών σε ιδιαίτερα δύσκολα ολοκληρώματα, αναγόμενοι σε ολοκληρώματα νε-ας μεταβλητής, αλλάζοντας τα άκρα ολοκλήρωσης. Σε απλές περιπτώσεις, όπως είναι η εφαρμογή γραμμικών μετασχηματισμών, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση απευθείας χωρίς την εισαγωγή νέου συμβόλου ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, δεδομένου φυσικά ότι ο μετασχηματισμός που θεωρούμε είναι αντιστρέψιμος στο διάστημα στο οποίο λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση. Για παράδειγμα, η πιο πάνω σχέση μας λέει ότι

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a + b - x) d(a + b - x).$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-35 από το (ΝΓΓ)

Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < b$) μια συνεχής συνάρτηση.

1. Αν

$$f(a + b - x) = f(x), \forall x \in [a, b], \quad (2)$$

τότε

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Αν

$$f(a - x) = f(x), \forall x \in [0, a], \quad (3)$$

τότε

$$\int_0^a x \cdot f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx.$$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx.$$

Απόδειξη.

1. Χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = a + b - x, x \in [a, b]$$

έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_a^b x \cdot f(x) dx \\ &= \int_a^b (a+b-x) \cdot f(a+b-x) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_a^b (a+b-x) \cdot f(x) dx \\ &= \int_a^b (a+b) \cdot f(x) dx - \int_a^b x \cdot f(x) dx \\ &= (a+b) \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

και αρα

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = a - x, \quad x \in [0, a]$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^a x \cdot f(x) dx &= \int_0^a (a-x) \cdot f(a-x) dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_0^a (a-x) \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^a a \cdot f(x) dx - \int_0^a x \cdot f(x) dx$$

και αρα

$$\int_0^a x \cdot f(x) dx = \frac{a}{2} \int_0^a f(x) dx.$$

3. Άμεσο από το προηγούμενο ερώτημα. Διαφορετικά, αν θέλαμε να το αποδείξουμε ανεξάρτητα: χρησιμοποιώντας ουσιαστικά το μετασχηματισμό

$$u(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$$

έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) dx \\ &= - \int_0^\pi (\pi-x) \cdot f(\eta\mu(\pi-x)) d(\pi-x) \\ &= - \int_0^\pi (\pi-x) \cdot f(\eta\mu x) d(\pi-x) \\ &= -\pi \int_0^\pi f(\eta\mu x) d(\pi-x) + \\ & \quad + \int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) d(\pi-x) \\ &= \pi \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx - \int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) dx \end{aligned}$$

και αρα

$$2 \int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) dx = \pi \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx$$

δηλ.

$$\int_0^\pi x \cdot f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx.$$

□

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_0^\pi x \cdot \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για $a = 0$, $b = \pi$ και $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Είναι $\forall x \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} f(a+b-x) &= f(\pi-x) = \frac{\eta\mu(\pi-x)}{1+\sigma\upsilon\nu^2(\pi-x)} \\ &= \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

και αρα εφαρμογή του προηγούμενου δίνει

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της πιο πάνω:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx &= \int_0^\pi \frac{d(-\sigma\upsilon\nu x)}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx \\ &= - \int_0^\pi \frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx \\ &= - [\text{τοξεφ}(\sigma\upsilon\nu x)]_0^\pi \\ &= - [\text{τοξεφ}(-1) - \text{τοξεφ}(0)] \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

και αρα

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-Δες Άσκηση 12/(β) i. σελ 109 στο (ΚΥΠ)

Να υπολογιστεί το

$$\int_0^1 \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}} dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x - 2^{1-x}}.$$

Εφαρμόζοντας την ΠΡΟΤΑΣΗ για $a = 0$ και $b = 1$, έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(0+1-x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx \quad (4)$$

Αλλά,

$$f(1-x) = \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} - 2^x}$$

και άμεσα βλέπουμε ότι

$$f(x) + f(1-x) = 1$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = \int_0^1 dx = 1 \quad (5)$$

Όμως, με τη βοήθεια της (4), έχουμε

$$\int_0^1 [f(x) + f(1-x)] dx = 2 \int_0^1 f(x) dx \quad (6)$$

Άρα, οι (5) και (6) δίνουν $2 \int_0^1 f(x) dx = 1$, δηλ.

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ-Δες Άσκηση 12/(β) ii. σελ 109 στο (ΚΥΠ)

Να υπολογιστεί το

$$\int_1^3 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)} dx.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + \ln(4-x)}.$$

Είναι καλά ορισμένη αφού για $x \in [1, 3]$ είναι $4-x \geq 0$. Εφαρμόζοντας την ΠΡΟΤΑΣΗ για $a = 1$ και $b = 3$, έχουμε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 f(1+3-x) dx = \int_1^3 f(4-x) dx \quad (7)$$

Αλλά,

$$f(4-x) = \frac{\ln(4-x)}{\ln x + \ln(4-x)}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) + f(4-x) = 1$$

Συνεπώς,

$$\int_1^3 [f(x) + f(4-x)] dx = \int_1^3 dx = 2 \quad (8)$$

Όμως, με τη βοήθεια της (7), έχουμε

$$\int_1^3 [f(x) + f(4-x)] dx = 2 \int_1^3 f(x) dx \quad (9)$$

Άρα, οι (8) και (9) δίνουν $2 \int_1^3 f(x) dx = 2$, δηλ.

$$\int_1^3 f(x) dx = 1.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-36 από το (ΝΓΓ) και η άσκηση 11/σελ. 138 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a - x) = f(x)$, όπου $a > 0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Ως εφαρμογή, δείξτε ότι

$$\int_0^\pi f(\eta\mu x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x) dx.$$

Λύση

$f(2a - x) = f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(x) dx &= \int_a^0 f(2a - x) d(2a - x) \\ &= \int_a^0 f(x) d(2a - x) = - \int_a^0 f(x) dx \\ &= \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

και αρα

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Εφαρμόζοντας το πιο πάνω αποτέλεσμα για $a = \pi/2$ και αφού $\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$, $\forall x \in (0, \pi)$ αλλά και λόγω της συνέχειας της f , έπεται ότι

$$\int_0^\pi f(\eta\mu x) dx = 2 \int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x) dx.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 20-37 από το (ΝΓΓ) και η άσκηση 12/σελ. 138 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση και τέτοια ώστε $f(2a - x) = -f(x)$, όπου $a > 0$, τότε

$$\int_0^{2a} f(x) dx = 0.$$

Λύση

$f(2a - x) = -f(x)$, $\forall x \in [0, 2a]$. Τότε,

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^{2a} f(x) dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} f(x) dx &= \int_a^0 f(2a - x) d(2a - x) \\ &= - \int_0^a (-f(x)) dx = - \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

και αρα

$$2 \int_a^{2a} f(x) dx = 0, \text{ δηλ. } \int_a^{2a} f(x) dx = 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 13/σελ 139 από το Β τεύχος του (ΚΥΠ)

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$, να δείξετε ότι

$$\int_0^a x^3 \cdot f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x \cdot f(x) dx.$$

(Δες και Εισαγωγικές εξετάσεις Κύπρου/Μαθ. Κατεύθυνσης-2019/Μέρος Β, Θέμα 5(γ))

Λύση

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x) = x^3 \cdot f(x^2)$, $x \in [0, a]$ είναι συνεχής, άρα (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = x^2$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($du/dx = 2x \geq 0$, $\forall x \in [0, a]$ και $=0$ μόνον για $x = 0$). Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής στο Ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned} \int_0^a x^3 \cdot g(x^2) dx &= \int_0^a x \cdot g(x^2) \cdot x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(a)} u \cdot g(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u \cdot g(u) du \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ - Είναι η άσκηση 16/σελ 139 από το Β τεύχος του(ΚΥΠ)

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g στο διάστημα $[0, \pi]$. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)$ και $g(x) + g(\pi - x) = \pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$:

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx.$$

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_0^\pi \frac{x \eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx$$

Λύση

(α) f και g συνεχείς στο διάστημα $[0, \pi]$ και άρα το γινόμενο τους είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα αυτό και άρα έχει νόημα το $\int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $y : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $y(x) = \pi - x$ ο οποίος είναι 1-1 και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής στο ορισμένο ολοκλήρωμα, είναι

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx \\ &= - \int_{y(0)}^{y(\pi)} f(\pi - y) \cdot g(\pi - y) dy \\ &= - \int_\pi^0 f(\pi - y) \cdot g(\pi - y) dy \\ &= \int_0^\pi f(\pi - y) \cdot g(\pi - y) dy \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση για τις f και g :

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi f(y) \cdot (\pi - g(y)) dy \\ &= \pi \int_0^\pi f(y) dy - \int_0^\pi f(y) \cdot g(y) dy \\ &\equiv \pi \int_0^\pi f(x) dx - \int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

και άρα

$$2 \int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx = \pi \int_0^\pi f(x) dx,$$

δηλ.

$$\int_0^\pi f(x) \cdot g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx.$$

(β) Θεωρούμε τις f και g με τύπους $f(x) = \eta \mu x / (1 + \sigma \nu^2 x)$ και $g(x) = x$ αντίστοιχα.

Είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, \pi]$ και $\forall x \in [0, \pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{x \cdot \eta \mu(\pi - x)}{1 + \sigma \nu^2(\pi - x)} = \frac{x \cdot \eta \mu x}{1 + (-\sigma \nu x)^2} \\ &= \frac{x \cdot \eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} = f(x). \end{aligned}$$

και επίσης $g(x) + g(\pi - x) = x + \pi - x = \pi$. Πληρούνται λοιπόν οι υποθέσεις του προηγούμενου ερωτήματος για τις πιο πάνω συναρτήσεις. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x \cdot \eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx &= \int_0^\pi \underbrace{\frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx \end{aligned}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx &= - \int \frac{d(\sigma \nu x)}{1 + \sigma \nu^2 x} \\ &= -\text{τοξεφ}(\sigma \nu x) + c \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \nu^2 x} dx &= -\frac{\pi}{2} [\text{τοξεφ}(\sigma \nu x)]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{2} [\text{τοξεφ}(\sigma \nu(\pi)) - \text{τοξεφ}(\sigma \nu(0))] \\ &= -\frac{\pi}{2} [\text{τοξεφ}(1) - \text{τοξεφ}(-1)] \\ &= -\frac{\pi}{2} [\text{τοξεφ}(1) + \text{τοξεφ}(1)] \\ &= -\pi [\text{τοξεφ}(1)] = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 1.1. 22-76 από το (NΓΓ)

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό

$$t = k - x$$

όπου $k > 0$ σταθερά, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$A = \int_0^k \frac{f(k-x)}{f(x)+f(x-k)} dx$$

είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$B = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x)+f(x-k)} dx$$

(νοείται η υπόθεση $f \neq 0$ στο $[0, k]$).

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, να υπολογίσετε το $A + B$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $B = k/2$. Τέλος, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx$$

και

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx$$

Απάντηση

Ο μετασχηματισμός $t = k - x \Leftrightarrow x = k - t$ απεικονίζει (με αντιστρέψιμο τρόπο) το διάστημα $[0, k]$ στον εαυτό του. Επίσης, $dt = -dx$ και άρα, από το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα

$$A = \int_0^k \frac{f(x)}{f(x)+f(x-k)} dx = B.$$

Αλλά,

$$A + B = \int_0^k \frac{f(x) + f(x-k)}{f(x) + f(x-k)} dx = \int_0^k dx = k$$

και αφού $A = B$, έπεται ότι

$$A = B = \frac{k}{2}.$$

Τώρα, για τον υπολογισμό του

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx,$$

θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{\eta\mu x}, x \in [0, \pi/2]$$

όπως επίσης και η συνάρτηση g με τύπο

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)}{f(x) + f(\frac{\pi}{2} - x)} \\ &= \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)}} \\ &= \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} \end{aligned}$$

για $x \in [0, \pi/2]$.

Έτσι, από το προηγούμενο ερώτημα,

$$I = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης, εντελώς όμοια,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \eta\mu^3(\frac{\pi}{2} - x)} dx \\ &= \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 1.2.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^a f(x) dx,$$

όπου $a > 0$.

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx.$$

1. Η f είναι συνεχής, άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx$ και αφού $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $g(x) = 1 - g(-x), \forall x \in [-a, a]$. Έτσι,

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a f(x) \cdot (1 + g(x)) dx \\ &= \int_{-a}^a f(x) \cdot (1 - g(-x)) dx \\ &= \int_{-a}^a f(x) dx - \int_{-a}^a g(-x) dx \end{aligned}$$

Αφού η f είναι άρτια, ξέρουμε ότι

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Ακολούθως, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = -x$ ο οποίος είναι αμφιμονοσήμαντος (στο πεδίο ορισμού) του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση:

$$du/dx = -1 < 0, \forall x \in [-a, a].$$

Τότε

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a f(x) \cdot g(-x) dx \\ &= \int_{u(-a)}^{u(a)} f(-u) \cdot g(u) dx \\ &= \int_a^{-a} f(u) \cdot g(u) du \\ &\equiv \int_a^{-a} f(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx \\ &= 2 \int_0^a f(x) dx - \int_a^{-a} f(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

και τελικά,

$$\int_a^{-a} f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin x, \forall x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$ και $g(x) = 1/(e^{2x} + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Είναι $\sin(-x) = \sin(x), \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$ και

$$x \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow (-x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

δηλ. f άρτια και $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & g(x) + g(-x) \\ &= \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{e^{-2x} + 1} \\ &= \frac{e^{-2x} + 1 + e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)(e^{-2x} + 1)} \\ &= \frac{e^{-2x} + e^{2x} + 2}{e^{-2x} + e^{2x} + 2} = 1 \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

Άσκηση 1.3.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση

$$g(x) \cdot g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx = \int_0^a f(x) dx,$$

όπου $a > 0$.

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x} + 1} dx.$$

1. Η $f/(1+g)$ είναι συνεχής, άρα έχει νόημα το $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx$ και

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx &= \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+g(x)} dx + \\ &+ \int_0^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx \end{aligned}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+g(x)} dx &= - \int_a^0 \frac{f(-x)}{1+g(-x)} dx \\ &= \int_0^a \frac{f(-x)}{1+g(-x)} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{1+g(-x)} dx \end{aligned}$$

αφού η f είναι άρτια και αφού

$$g(x) \cdot g(-x) = 1 \Rightarrow g(x) \neq 0, \forall x \in [-a, a]$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{f(x)}{1+g(-x)} dx &= \int_0^a \frac{g(x)f(x)}{g(x)(1+g(-x))} dx \\ &= \int_0^a \frac{g(x)f(x)}{g(x)+g(x)g(-x)} dx = \int_0^a \frac{g(x)f(x)}{1+g(x)} dx \end{aligned}$$

(από την υπόθεση για την g). Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx &= \int_0^a \frac{g(x)f(x)}{1+g(x)} dx + \\ &+ \int_0^a \frac{f(x)}{1+g(x)} dx \\ &= \int_0^a \frac{f(x)(g(x)+1)}{1+g(x)} dx \\ &= \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \pi/2$,

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$$

και

$$g(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu(x), \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, δηλ. f άρτια και $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(x) \cdot g(-x) = e^{2x} \cdot e^{-2x} = 1.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x} + 1} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{1}{e^{2x} + 1} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x dx = 1 \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4.

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g περιττή.

1. Να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)} + 1} dx = \int_0^a f(x) dx$$

(όπου $a > 0$)

2. Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5}{2e^{\eta\mu x} + 2} dx.$$

1. Το $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx$ έχει νόημα λόγω της συνέχειας της $f/(e^g + 1)$ (ως σύνθεση συνεχών). Ας επισημάνουμε επίσης ότι $e^g + 1 > 0$ παντού. Τώρα, είναι

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx &= - \int_a^0 \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1} dx \\ &= \int_0^a \frac{f(-x)}{e^{g(-x)}+1} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{e^{-g(x)}+1} dx \\ &= \int_0^a \frac{f(x)}{\frac{1}{e^{g(x)}}+1} dx = \int_0^a \frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1} dx \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε τις υποθέσεις συμμετρίας των f και g) και αρα

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx \\ &= \int_0^a \frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} dx \\ &= \int_0^a \left[\frac{e^{g(x)}f(x)}{e^{g(x)}+1} + \frac{f(x)}{e^{g(x)}+1} \right] dx \\ &= \int_0^a \frac{f(x)(e^{g(x)}+1)}{e^{g(x)}+1} dx \\ &= \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

2. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο ερώτημα για $a = \pi/2$,

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x + 5, x \in [-a, a] \equiv [-\pi/2, \pi/2]$$

και

$$g(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}.$$

Αφού $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu(x)$, $\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$, έπεται ότι η f είναι άρτια και αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -g(x),$$

έπεται ότι η g είναι περιττή συνάρτηση.

Πληρούνται λοιπόν όλες οι υποθέσεις του πρώτου ερωτήματος. Άρα

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5}{2e^{\eta\mu x} + 2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + 5}{e^{\eta\mu x} + 1} dx \\ &\stackrel{1.}{=} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sigma\upsilon\nu^2 x + 5) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \sigma\upsilon\nu(2x)}{2} + 5 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\eta\mu(2x)}{4} + \frac{11x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{11\pi}{8} \end{aligned}$$

Ασκήσεις που δόθηκαν σε Τελικές εξετάσεις

2018- Εισαγωγικές Εξετάσεις Κύπρου (B Σειρά)

Δίνεται συνεχής και άρτια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -t$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x) dx,$$

όπου $a, b > 0$.

(β) Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)}.$$

Λύση

(α) Έχουμε καταρχάς ότι αφού η f είναι άρτια,

$$f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]. \quad (10)$$

Επίσης,

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+b^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $t : [-a, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ με $t(x) = -x$ ο οποίος είναι 1-1 και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($dt/dx = -1 < 0, \forall x \in (-a, 0)$ και συνεχής στα άκρα του π.ο. της). Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= - \int_{t(-a)}^{t(0)} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \\ &= \int_0^a \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} dt \stackrel{(10)}{=} \int_0^a \frac{f(t)}{1+b^{-t}} dt \\ &= \int_0^a \frac{b^t \cdot f(t)}{1+b^t} dt \equiv \int_0^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx \end{aligned}$$

και αρα

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx &= \int_0^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a \frac{f(x) + b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx \\ &= \int_0^a \frac{f(x) \cdot (1+b^x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για $a = 1 > 0, b = e > 0$ και

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Η f είναι άρτια και αρα από πριν:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2+1)(1+e^x)} = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = [\text{τοξεφ}x]_0^1 = \text{τοξεφ}1 - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{4}$$

2018- Δειγματικό για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις (Από οδηγό σπουδών της Κύπρου)

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι $g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u(x) = -x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^a f(x) dx,$$

όπου $a > 0$.

(β) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^{2x} + 1} dx$$

Λύση

Έχουμε καταρχάς ότι αφού η f είναι άρτια,

$$f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]. \quad (11)$$

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = -x$ ο οποίος είναι 1-1 και επί στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($du/dx = -1 < 0, \forall x \in (-a, a)$ και συνεχής στά άκρα του π.ο. του). Επίσης, αφού η $f \cdot g$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $[-a, a]$, έπεται ότι έχει νόημα το $\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx$ και αφού

$$g(x) + g(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) = 1 - g(-x), \forall x \in \mathbb{R},$$

έχουμε ότι

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = \int_{-a}^a f(x) dx - \int_{-a}^a f(x) \cdot g(-x) dx.$$

Είναι

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad (12)$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_{u(-a)}^{u(0)} f(-u) du = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du \stackrel{(11)}{=} \int_a^0 f(u) du \quad (13)$$

Από τις (12) και (13) έχουμε

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) \cdot g(-x) dx &= - \int_{u(-a)}^{u(a)} f(-u) \cdot g(u) du = - \int_a^{-a} f(-u) \cdot g(u) du \\ &\stackrel{(11)}{=} \int_{-a}^a f(u) \cdot g(u) du \equiv \int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και συμμετρία συναρτήσεων

και έτσι

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx - \int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx$$

δηλ.

$$\int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^a f(x) dx.$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για f και g τις συναρτήσεις με τύπους

$$f(x) = \sin x \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}$$

αντίστοιχα. Η συνάρτηση g έχει π.ο. το \mathbb{R} και μάλιστα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} \\ &= \frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 1 \end{aligned}$$

και οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις (στο \mathbb{R}). Πληρούνται οι υποθέσεις του (α) ερωτήματος το οποίο για $a = \pi/2$ δίνει:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x dx = [\eta\mu x]_0^{\pi/2} = 1$$

2019- Εισαγωγικές Εξετάσεις Κύπρου (Α Σειρά)

(α) Να αποδείξετε ότι

$$(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$$

και να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x^2 = u$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^a x^3 \cdot g(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x \cdot g(x) dx$$

(δ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2)$, δεξιά από την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και αριστερά από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Λύση

(α) (με πεπλεγμένη παραγώγιση)

Έχουμε για $y \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$\begin{aligned} y = \text{τοξεφ}x &\Leftrightarrow x = \varepsilon\varphi y \Leftrightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{d(\varepsilon\varphi y)}{dx} \Leftrightarrow 1 = \text{τεμ}y \cdot \varepsilon\varphi y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 y} \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

($x \in \mathbb{R}$)

Σημείωση: αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, έπεται ότι $\text{τεμ}y \neq 0$.

(β) Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο ερώτημα και τον κανόνα της αλυσίδας. Κατ'αρχάς είναι $f(x) = (g \circ h)(x)$, όπου $h(x) = x^2$ και $g(x) = \text{τοξεφ}x$. Έτσι,

$$D(f) = \{x \in D(h) \mid h(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (\text{τοξεφ}(x^2))' = (\text{τοξεφ})'(x^2) \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια (εύκολο). Συνεπώς, αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $[0, +\infty)$. Είναι $f'(x) = 2x/(1+x^4) > 0$, $\forall x > 0$ και αρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \infty)$. Λόγω της συνέχειάς της στο $x = 0$, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \infty)$.

Έπεται ότι (λόγω της συνέχειας και του ότι είναι άρτια) ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και

Ορισμένο Ολοκλήρωμα και συμμετρία συναρτήσεων

από τα πιο πάνω, έχουμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 0$ και το μόνο ακρότατό της είναι αυτό.

Έτσι, και αφού $f(0) = \text{τοξεφ}(0) = 0$, έπεται τελικά ότι $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \geq 0$ με την ισότητα ΜΟΝΟ για $x = 0$.

(γ) Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x) = x^3 \cdot g(x^2), x \in [0, a]$ είναι συνεχής, άρα (κατά Riemann) ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = x^2$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($du/dx = 2x \geq 0, \forall x \in [0, a]$ και $=0$ μόνον για $x = 0$). Έτσι, από το Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής στο Ορισμένο ολοκλήρωμα,

$$\begin{aligned} \int_0^a x^3 \cdot g(x^2) dx &= \int_0^a x \cdot g(x^2) \cdot x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(a)} u \cdot g(u) du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u \cdot g(u) du \equiv \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

(δ) Από τα πιο πάνω ερωτήματα, έχουμε ότι $h(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Είναι

$$h(1) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}$$

και άρα

$$E = \int_0^1 x^3 \cdot \text{τοξεφ}(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1^2} x \cdot \text{τοξεφ}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \text{τοξεφ}(x) dx$$

όπου στην πρώτη ισότητα κάναμε χρήση του προηγούμενου ερωτήματος. Τώρα, κατα τα γνωστά (ολοκλήρωση κατά μέρη) έχουμε

$$\int \text{τοξεφ}(x) dx = \frac{1}{2} (x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x) + c$$

και άρα

$$E = \frac{1}{2} [x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

(τετραγωνικές μονάδες)

Αναφορές

(ΝΓΓ) Σ. Νεγρεπόντης, Σ Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας - Απειροστικός Λογισμός, τόμοι Ι,Ια,Ιβ, εκδόσεις Συμμετρία, 2000

(ΚΥΠ) Ομάδα Καθηγητών - Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης τεύχη Α,Β,Γ και Δ, ΥΠΠΑΝ, 2η έκδοση, 2019